

(فهرسة كتاب حساب المثلثات)

صفحة

١	الباب الأول
	في نظري الخطوط المثلثية
٢	في موضوع علم حساب المثلثات وكيفية تقدير الزوايا والاضلاع باعداد
	في تعريف الخطوط المثلثية واستعمال اشارتي + و - لبيان
	الاضلاع المتضادة
٦	في بيان تنقل الخطوط المثلثية على محيط الدائرة وكيفية تحويلها
	الى الربع الاول من المحيط
١٢	الكلام على الاقواس المقابلة لجيب معلوم او جيب تمام كذلك الخ
١٥	كيفية تحويل الجيوب وجيوب التمام الى نسب بسيطة
١٧	في بيان ارتباطات الخطوط المثلثية بعضها ببعض
٢٢	في بيان تركيب القوانين التي يستخرج منها + و - و د
	ونماي جيبهما
٢٦	في بيان قوانين ضرب الاقواس وقسمتها
٣٣	في بيان القوانين المتعلقة بالظلال
٣٦	قوانين اخرى كثيرة الاستعمال
٣٩	في بيان براهين هندسية على القوانين المتقدمة
٤٤	الباب الثاني
	في بيان الجداول المثلثية وفي حل المثلثات
	في كيفية وضع الجداول المثلثية
٥٠	في حساب الجيوب وجيوب التمام من ٩ الى ١٨ ومن ١٨ الى
	٢٧ بزيادة ٩ و ٩ وهكذا لتحقيق الجداول
٥٢	كيفية وضع جداول كاليت واستعمالها
٥٨	في النسبة التي بين اضلاع مثلث مستقيم الاضلاع وزواياه

الدعوى الاولى النظرية	٥٨
الدعوى الثانية	٥٩
الدعوى الثالثة النظرية	
الدعوى الرابعة النظرية	٦٠
حل المثلثات المستقيمة الاضلاع القوائم الزاوية	٦٢
الحالة الاولى	
الحالة الثانية	
الحالة الثالثة	٦٣
الحالة الرابعة	
في حل امثلثات المستقيمة الاضلاع اياما كانت	٦٤
الحالة الاولى	
الحالة الثانية	
الحالة الثالثة	٦٧
الحالة الرابعة	٧٠
عمليات رقمية	٧٣
العملية الاولى انظر شكل (١٩)	٧٤
العملية الثانية انظر شكل (٢٠)	
العملية الثالثة انظر شكل (٢٠)	٧٥
العملية الرابعة انظر شكل (٢١)	٧٦
العملية الخامسة انظر شكل (٢٣)	٧٧
العملية السادسة انظر شكل (٢٤)	٧٨
العملية السابعة	٨٠
الباب ————— الثالث	٨٢

في بيان المثلثات الكروية وفي النسب الواقعة بين زوايا مثلث كروي

وبين اضلاعه

قانون اصلي

- ٨٨ في نسب المهندس نبيز
- ٩٠ في النسبة بين اجزاء المثلثات الكروية القوايم الزاوية
- ٩١ في حل المثلثات الكروية القوايم الزاوية
- ٩٢ الحالة الاولى
- الحالة الثانية
- ٩٣ الحالة الثالثة
- الحالة الرابعة
- ٩٤ الحالة الخامسة
- الحالة السادسة

تنبيه

- ٩٥ في حل المثلثات الكروية اباما كانت
- الحالة الاولى
- ٩٧ الحالة الثانية
- ٩٩ الحالة الثالثة
- ١٠٠ الحالة الرابعة
- ١٠١ الحالة الخامسة
- ١٠٢ الحالة السادسة
- الكلام على الحالات المشكوك فيها من المثلثات الكروية
- ١٠٧ عمليات حساب المثلثات الكروية
- العملية الاولى
- ١٠٨ العملية الثانية
- ١١٠ الباب ————— الرابع

في بيان قوانين تستعمل في الرياضيات العالية وفي تحويل الجيب
وجيب التمام الى متسلسلات وفي حل المعادلات ذات الحدين والمعادلة
بدرجة ثالثة

١١١ في الكلام على قانون المهندس مواور وفيما يراد فيه من كلمة مضروب

١٢٢ تحويل الجيب وجيب التمام الى متسلسلات

١٢٦ حل المعادلات ذات الحدين بواسطة الجداول ونظرية المهندس

قوطس

١٣٣ دعوى المهندس قوطس النظرية

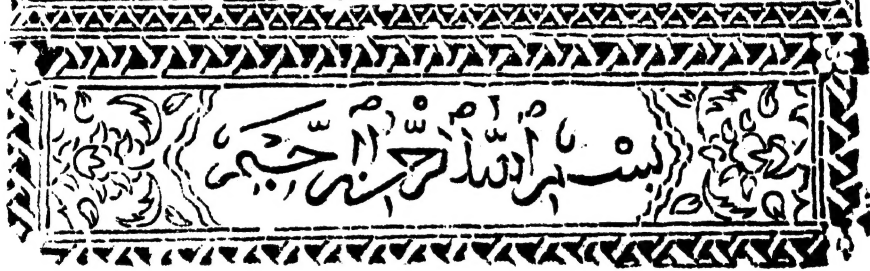
١٣٤ حل المعادلات التي بدرجة ثالثة بواسطة الجداول

١٤٠ طريقة اخرى لحل المعادلات التي بدرجة ثالثة بواسطة حساب

المثلثات

تفكر في افندي

صواب	خطا	سطر	صفحه
$\text{ظا} = (\text{س} - ١٨٠^\circ)$	$\text{ظا} = (\text{س} - ١٨٠^\circ)$	١٦	٨
$\text{ظت} = (\text{س} - ١٨٠^\circ)$	$\text{ظت} = (\text{س} - ١٨٠^\circ)$	١٦	٨
فقمادير	فقمدار	٧	١٤
جا (ع-د)	جا (ع-د)	٨	٢٥
$\text{ظت} \frac{1}{\rho} (\text{ه} - \text{و})$	$\text{ظت} \frac{1}{\rho} (\text{ه} - \text{و})$	٦	٣٧
$\text{ج} = ٢ \text{جت د جت د}$	$\text{ج} = ٢ \text{جت د جت د}$	١٤	٤٧
اذا كان د = د	اما د = د	١٣	٦٥
$\text{د} = \text{د}^2 + \text{ه}^2 - ٢ \text{د ه}$	$\text{د} = \text{د}^2 - \text{و}^2 - ٢ \text{د و}$	١٨	٧٠
الامس	المعامل	٢٠	١٢٩
$\text{س}^3 + ٣ \text{ع}^2 \text{س} - \text{ع}^3$	$\text{س}^3 + ٣ \text{ع}^2$	٨	١٤٤



ظلال نعمائك اللهم مديدة * وأشكال آلائك منشورة عديدة * وقواطع
 الموانع عن هباتك شديدة * وموانع القواطع عنك كل يوم جديدة *
 مستمرة على ممر الثواني والدقائق * صوّرت فاحسنت * وانعمت فأنعمت *
 واعطيت فأسبغت * وبيّنت فاحكمت * واظهرت لمن اخترت خبايا
 زوايا الحقائق * فن المحيط بكنه وجودك * ومن المطلع على دوائر كرمك
 وجودك * ومن القائم بواجبات شهودك * ومن الواقف من الانام عند
 حدودك * فسبحانك انت الخالق الرازق * فوقتنا للوفاء ببعض حقوق
 جدك * والقيام بالخضوع لكبريائك ومجداك * واغدق علينا من خزان
 سعادتك * وادخلنا بفضل جنان خلدك * مع من احببته واصطفيتهم من
 الخلائق * وصل وسلم على نبيك المحبوب * الذي اطلعته على مفاتيح الغيوب *

ونزهت خلقه عن شوائب العيوب * فنهى عن الحلق والصلق وشق الجيوب *
 ورعى بسهام قسى دينه كل منافق * وعلى آله واصحابه ملالا الرياضة *
 الواردين من العلم حياضه ورياضه * العارفين من الدين وسائله واغراضه *
 الحائزين من بليغ الكلام عراضه * ماذر شارق اوتألق بارق *
 (اما بعد) فهذا كتاب في علم حساب المثلثات * المسمى بالفرنساوية
 تريجونوميثريا ترجمه احمد افندي دقله من اللغة الفرنسية الى اللغة العربية
 بمدرسة المهندسخانة الخديوية المصرية * ثم قوبل في هذه المدرسة مرات *
 فزال ما احتوى عليه من التعقيدات * فسلل المسلك القويم * وعادت الصحة
 للسقيم * على يد كل من مصححه ومقابله ابراهيم الدسوقي وابي السعود
 افندي * فناء بحمد الله المعيد المبدى * سليمان لغمة الترجمة من اللغات
 الافرنجية * منتظما في سلك التأليف الرياضية العربية * فالتما كفنا
 ببقاء الدولة * وعز الصولة * لمن اجرى الله على يده هذه النعمة * وازال به
 من الحمل الغمة * الوزير الاعظم * والدستور المكرم * من غمر
 الوفود بالجود وراشا * سعادة افندينا الحاج محمد علي باشا * سيد مصر *
 وفريد العصر * لازال بالغامانيه * قاهر الاعاديه * ولا زالت خصاله المرضية
 الحميدة * وفعاله الخيرية العديدة * توصف بيدائع الاشعار * وابكار الافكار
 تنشئها فيما بيننا فرحين * وتنشدها وتقول مترمين

هات حدث وشنف الاسما * وتفنى وهذب الاسجما
 واكتروا بتكر يدع المعاني * وانتقدها واحسن الاخترا
 واطل في امتداح صاحب مصر * واجل في علا المديح اليراعا
 هو قرن لا قرن يحكيه اصلا * فضله في الافاق شاع وذاعا
 قد غدا الدهر عبده فاذا ما * امر الدهر في الامور اطاعا
 كل من رام للوزير سباقا * لم ينل من مناه الا الضياعا
 اين كسرى واين قيصر منه * ان ينالا لما اجاد اتباعا
 امل الغير ان يمدن مصرا * فابت حسين رام الامتناعا

لم توأصله غير طرفة عين * وسلام الجفا يكون وداعا
 فتبدى عزم الحديدوى فيها * وسريعا ازال عنها القناعا
 وقفى اثره وانك هذا * فاق عنه وابدع الابداعا
 فرائنا لدارس الدرس عودا * ورأينا ذكر المدارس شاعا
 ورأينا غصن المعارف غضا * ناضر النور يانعا ايناعا
 ورأينا تلك الجيوش النوامى * ورأينا العدو منها مراعا
 وحينا حى الحقيقة فينا * وقتحنا مداينا وقلاعنا
 وتبدى الامان فى الارض حتى * اضعف الشاه ليس ينجى السباعا
 لك عقل به عقال المعالى * لعلاء الملوك صارت رعا
 ولعمرى لانت شمس علاء * يكسب الغير من علاك الشعاعا
 فاطال الاله عمرك طولا * مع طول وزاد فيه اتساعا
 كى نرى النصر والسعود بمصر * ونرى للشباب فيها ارتجاعا
 انت فيها والنيل نيلان الا * انك اليوم انت اقوى اتفعا
 هو ان جاء مرة كل عام * وروانا وعال قوما جيعا
 فلجدوى نعمالك فى كل وقت * عنك نروى الاجناس والانواعا
 دمت فيها محمدا بمعالى * لك عليا من الاله تراعى

واماتى اللتمام * بقدرة الملك العلام *

وسم برضاب الغانيات * فى حساب

المثلثات * فالحمد لله

على كل حال واليه

المرجع

والمأل

تم

ن

الباب الاول

في نظري الخطوط المثلثية

في موضوع علم حساب المثلثات وكيفية تقدير الزوايا والاضلاع باعداد

(١)

اي مثلث كان سواء كان مستقيم الاضلاع او كرويا او جدي فيه ستة اشياء ثلاثة زوايا وثلاثة اضلاع ولاجل تعيينه يكفي معرفة ثلاثة منها لكن اذا كان المثلث مستقيم الاضلاع فلا بد ان يدخل في تلك الثلاثة ولوضعا واحدا لان من المعلوم ان الثلاثة زوايا يمكن ان يحدث منها جملة مثلثات مستقيمة الاضلاع غير متساوية بل متشابهة باعتبار ان مجموع الثلاثة زوايا المعلومة مساو لقائمتين

وعلم الهندسة هو المتكفل ببيان الرسوم السهلة لكل طريقة من طرق تعيين مثلث ما اذا علم منه بعض الاجزاء ولكن هذه الطرق كبقية الطرق الرسمية لا تفيد الرسوم الا تقريرا وبما كانت غير كافية لعدم ضبط الآلات المستعملة فيهم اول ذلك بحيث وان ان يبدلوا الطرق الرسمية بحسابات رقمية بها يمكن التوصل الى درجة الضبط المحتاج اليها والغرض الاصلى افادة طرق لحل جميع اجزاء المثلث اذا علم منها ثلاثة ويسمى ذلك بحل المثلث

(٢)

فلاجل تعيين الاضلاع باعداد تقدر بواحد معلوم كالمترو حينئذ كل ضلع يساوي جملة امتار

(٣)

وقد قدروا الزوايا بالاقواس المحصورة بين اضلاعها ولذا ينقسم اي محيط كان الى جملة اجزاء متساوية اي درج وحينئذ فالزاوية والقوس بقدر بعدد من الدرج

وقد اتفق المهندسون سابقا على تقسيم محيط الدائرة الى ٣٦٠ درجة وكل درجة الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا فبهذه

الكيفية يكون قياس الزاوية القائمة ربع المحيط اى ٩٠ درجة ولكن لازالة
الاشتباه فى الاعداد المنتسبة ادخلوا القاعدة الاعشارية فى مقاييس الزوايا
وحينئذ يكون ربع الدائرة منقسما الى مائة درجة وكل درجة الى مائة دقيقة
وكل دقيقة الى مائة ثانية على قياس ما تقدم

وقد ميزوا الدرجات والدقائق والثواني بعلامات فعلمة الاولى (°) والثانية
(') والثالثة (") فلو اردنا ان نكتب ١٤ درجة و ٩ دقائق
و ٣٧ ثانية كتبناها هكذا

$$14^{\circ} 9' 37''$$

ولو اردنا تنزيل هذا الوضع على التقسيم الجديد لكتبنا هكذا ١٤٠٩٣٧
فكل درجة من ربع المحيط على التقسيم الجديد تكون فى الوضع كواحد من
مائة والدقيقة كواحد من عشرة الاف والثانية كواحد من مليون
وقد اتفق بعض علماء هذا الفن على ان يسموا الجزء بالنسبة للتقسيم القديم درجة
وبالنسبة للجديد معشارا
ومع ما للتقسيم الجديد من المزايا فالقديم هو المشهور الآن ولذا لم استعمل
غيره

وقد استعملت فى القوانين حرف \circ رمزا للنصف المحيط اى ١٨٠

فى تعريف الخطوط المثلثية واستعمال اشارتى + و -
ليبان الاوضاع المتضادة

(٤)

قد اضطر المهتمون ان يتوقفوا زمنا طويلا فى ايجاد النسبة التى بين
الزوايا واضلاع المثلثات حين ارادوا ان يقدروا الزوايا بالاقواس ولما لم يسهل
عليهم اجراء الحساب على الاقواس التجأوا الى ابدال الاقواس بالخطوط
المستقيمة التابعة لهذه الاقواس حتى ان الخطوط تتعين اذا علمت الاقواس
وبالعكس

وهذه الخطوط العامة النفع الان فى كل فرع من الفروع الرياضية تسمى

الخطوط المثلثية ولنشرع في تعريفها على الشكل فنقول
 جيب القوس ام من شكل (١) هو العمود م ب النازل من نهاية
 القوس على القطر المار بالنهاية الاخرى
 وظل القوس ام هو البعد ات المحصور على المماس المار من احدى نهايتي
 القوس بين هذه النهاية وامتداد القطر وم المار من النهاية الاخرى
 وقاطع القوس ام هو الجزء وت من نصف القطر الممدود بين المركز
 وبين الظل
 فاذا فرضنا ان سه قوس ام فالجيب والظل والقاطع يرمز اليها اختصارا
 هكذا

م ب = جامة و ات = ظاسه و وت = قاسه
 فاذا امتد م ب حتى قطع الدائرة في نقطة د فان وتر م د يكون ضعف
 م ب وقوس م د يكون ضعف ام فحينئذ جيب قوس ما هو
 نصف الوتر الموتر ضعف هذا القوس
 وبالرمز الى نصف قطر الدائرة ب رمز نق يكون ضلع المربع المرسوم
 داخلها مساويا نق ٢٧ وحيث كان القوس الموتر بضلع المربع ٩٠
 يكون

$$\text{جا } ٩٠ = \frac{1}{r} \text{ نق } ٢٧$$

كما ان ضلع المسدس المرسوم داخل الدائرة يساوي نق والقوس الموتر به
 ٩٠ فحينئذ يحدث

$$\text{جا } ٩٠ = \frac{1}{r} \text{ نق}$$

(٥)

وما يضاف الى القوس او الزاوية ليبلغ احدهما ٩٠ يشئ تماما وان بلغ
 القوس اكثر من ٩٠ فتمامه سالب فتمام ١٢٧ يكون - ٣٧
 وكذا الزاويتين الحادتين من مثلث قائم الزاوية تمام للآخرى
 وجيب تمام قوس ما يسمى جيب تمام هذا القوس وتمام ظله وتمام

قاطعته تمام قاطعه ويرمز لهذه الخطوط اختصارا بهذه الرموز جت
و ظت و قت فعلى ما ذكر يكون

جت سه = جا (٩٠ - سه)

ظت سه = ظا (٩٠ - سه)

قت سه = فا (٩٠ - سه)

فاذا التقنا نصف القطر و عمودا على وا ومددنا كلا من م ك و س ط
عمودا على و كان جيب القوس م هو كم و س ط ظله و
وط قاطعه وحيث كان من المعلوم ان قوس م - تمام قوس ام
فبالرمز بحرف سه الى قوس ام دائما يحدث

م ك = جت سه و س ط = ظت سه و وط = قت سه
وليتنبه الى ان م ك = و ب اعنى ان جيب اتمام يساوى الجزء
المحصور بين المركز وموقع الجيب من نصف القطر

(٦)

والبعد اب المحصور بين مبدء القوس وموقع الجيب يسمى عكس الجيب
والبعد ب ك يسمى عكس تمام الجيب ولكن هذان الخطان غير
مستعملين

(٧)

واذا نقلت النقطة م على جميع نقط محيط الدائرة اى من واحدة الى اخرى
ثم الى اخرى وهكذا كان للخطوط المثلثية اوضاع مغايرة للاوضاع التى كانت
لها حين كان قوس ام اقل من ٩٠ فاذا كان قوس ام مثلا تمامه
سالب ومساوى م كان وضع تمام جيب ك ا و و ب على يسار
نقطة و مع انه كان اولاً على يمينها وبهذا التغير فى وضع الخطوط يعسر
الحساب ويظهر ذلك بالمثال فاذا فرضنا كفى شكل (٢) ان ا س ط
خط ما مفروض عليه النقطتان ا و - المتباعدتان بالبعد ا -
= و وان بعد سه من نقطة - الى نقطة ما كنقطة م مأخوذة

على خط ا-ط معلوم وان المراد ايجاد البعد الذي بين نقطة ا و م
فاذا رمزنا بحرف ص الى البعد المطلوب فن المعلوم انه يوجد

$$ص = ط + م \quad او \quad ص = ط - م$$

وبحسب كون نقطة م في جهة ط او في جهة ا - يشاهد
اننا استعمالنا قانونين مختلفين لوضعي نقطة م ولكن يمكن ازالة هذه
الصعوبة بطريقة سهلة والاكتفاء باحدهذين القانونين بشرط ان يجعل للابعاد
المتضادة الاوضاع بالنسبة لنقطة - علامات مختلفة بان يوضع في القانون
الاول الذي هو $ص = ط + م$ على التوالي $م = ط + م$

$م - م = ط - م$ فيحدث اولا $م = ط + م$ و ثانيا
 $ص = ط - م$

فهذا ما يجب العمل به وبهذه الكيفية يليق القانون الاول لجميع مواضع نقطة
م ولا حاجة الى الثاني ويمكن ايضا ان تجعل كمية م موجبة في جهة ا -
وسالبة في جهة ط - وحينئذ فالمعول عليه القانون الثاني ولا حاجة
الى الاول وكان يلزم تعداد الامثلة لكن المثال المتقدم كاف في بيان منفعة
القاعدة التي رتبها المؤلف ديكرت وهي ان اذا فرضنا على خط ما مستقيما
كان او منحنيما ابعادا مختلفة مقيسة ومبتدأة من نقطة اصلية مشتركة قارة على
ذلك الخط دخلت في الحساب الابعاد المتضادة الاوضاع بالنسبة لاصل
مجمعولا لبعضها اشارة + ولبعضها اشارة -

ثم ان جهة الابعاد الموجبة تكون زيادة على ذلك غير متميزة متى تميزت كانت
الابعاد السالبة في الجهة المضادة لجهة الابعاد الموجبة واما الخطوط المثلثية
فالعادة ان تعتبر موجبة في الوضع الذي يكون لها متى كان القوس اقل من
٩٠ وهذا الوضع هو الذي ترى فيه من اول وهلة وسننتهز الفرصة بذكر
عدة امثلة مطابقة لهذه القاعدة ترجع اليها عند تطبيق الجبر على الدعاوى
الهندسية العملية لكن قبل الشروع في ذلك ننبه القارئ على غلط معتاد
يؤدي الى خلط القاعدة التي تكلمنا عليها بدعوى نظرية محتاجة للبرهان

ضرورة مع ان ينم ابونا بعيدا وما قواه المؤلفون من الاعتبارات في ذلك الخلط
مع ان منها ما هو معقول ومنها ما هو غير معقول غير صحيح بل هو مجرد اتفاق
لا يمكن لا تنبغي مخالفته فيما يأتي من الاعمال لوضوح منفعته باجراء
الامثلة عليه

في بيان تنقل الخطوط الثلثية على محيط الدائرة
وكيفية تحويلها الى الربع الاول من المحيط

(٨)

اذا كان $\frac{1}{4}$ قطر وم منطبقة على وا فن المعلوم ان قوس ام = \circ
والجيب = \circ والظل = \circ والقاطع = وا وجيب التمام م = \circ
= وا ايضا واما ظل التمام وقاطع التمام فغير منتهين لان خطى ر ط و
وط يزدادان كلما قرب خط وم من خط وا ويمكن ان يزدادا بلا نهاية
فلورمز بالنصف القطر برمز نق يحدث

جا = \circ وظا = \circ وقا = \circ نق

جت = \circ نق وظت = \circ لا وقت = \circ لا

فاذا ارتفع نصف قطر وم جهة وضع ور شوهذان كلا من الجيب والظل
والقاطع يزدادان كلا من جيب التمام وظل التمام وقاطع التمام يتناقص
واذا كانت نقطة م في وسط ار كان قوس ام \circ ومثلث و ب م
متساوي الساقين والجيب مساويا للجيب التمام وحيث ان المثلث ينتج منه

$\overline{م ب} = \overline{نق}$ ومن ذلك ينتج م ب = $\frac{1}{4}$ نق $\overline{٢٧}$ يكون
جا \circ = جت \circ = $\frac{1}{4}$ نق $\overline{٢٧}$

وحيث ان مثلثي وات و ور ط متساويا الساقين ومتساويان فالظل
وظل التمام مساويان لنصف القطر وينتج من ذلك

طا \circ = طت \circ = نق

وحيث ان القاطع وقاطع التمام متساويان ايضا وان مثلث وات يحدث منه
(وت) $\overline{٢٧} = \overline{نق}$ ومن ذلك يحدث وت = نق $\overline{٢٧}$ ينتج من ذلك

$$\text{قا } ٩٠^\circ = \text{قت } ٩٠^\circ = \text{نق } ٩٠^\circ$$

وحين تنتقل نقطة م الى - فالجيب يساوى ور والظل والقاطع لا ينتهيان وتمام جيب م ك يصير صغرا وتمام ظل - ط كذلك وتمام قاطع وط يصير مساويا ور وحينئذ يحدث

$$\text{جا } ٩٠^\circ = \text{نق } ٩٠^\circ \text{ و } \text{طا } ٩٠^\circ = \text{لا } ٩٠^\circ \text{ و } \text{قا } ٩٠^\circ = \text{لا } ٩٠^\circ$$

$$\text{جت } ٩٠^\circ = ٠ \text{ و } \text{ظت } ٩٠^\circ = ٠ \text{ و } \text{قت } ٩٠^\circ = \text{نق } ٩٠^\circ$$

ويمكن استخراج هذه النتائج من النتائج الحاصلة حين يكون القوس مساويا لصغرا لان احد القوسين اذا كان صغرا والاخر ٩٠° وكل منهما تمام للاخر يحدث

$$\text{جا } ٩٠^\circ = \text{جت } ٠^\circ \text{ و } \text{طا } ٩٠^\circ = \text{ظت } ٠^\circ \text{ و } \text{قا } ٩٠^\circ = \text{قت } ٠^\circ$$

وبالعكس

(٩)

واذا فرضنا ان نصف قطر وم استرديدور الى ان وصل الى وم فالقوس يصير ام وجيبه م ب ويجعل م م موازيا ا ا ورسم جميع خطوط القوس ام المثلثية كما هو مبين في الشكل يظهر اولا ان جيبى م ب و م ب متساويان وحينئذ يكون جا ام = جا ام

ولا يبعد ان الظل يجب مد نصف قطر وم تحت قطر ا ا فيشاهد ان الظل الذى هو هنا ا ب في وضع مضاد للوضع الذى كان فيه اولا وبالضرورة يكون سلبيا وحيث ان مثلثى و ا ب و ا ب المتساويين يحدث عنهما ا ب = ا ب يكون ظل ام = - ظل ام وبمقتضى ما سبق في التعريف الرابع يكون قاطع قوس ام هو خط و ب وعلى هذا فليس هذا الخط متجهما الا ان الى جهة نصف قطر وم في جهة تحرك النقطة التى هى م بل في الجهة المضادة ا م وهذا كان القاطع سلبيا وحيث كان و ب =

$$\text{وت ينتج من ذلك ان } \text{قا ام} = - \text{قا ام}$$

وكل من جيب التمام وظل التمام وقاطع التمام يتغير كما سبق وحيث كان قوس

ا م اكبر ٩. يكون تمامه سلبيا وحيث كان جيب تمام كم ١ و و
على يسار نقطة و يكون ايضا سلبيا وكذا يقال في ظل تمام و ط
واما قاطع التمام و ط فلا سبب لان توضع له اشارة ناقص لانه يوجد على خط
وم في جهة تحرك النقطة كما وقع في الربع الاول من المحيط ومن حيث ان
مثلث و ر ط ومثلث و ر ط متساويان ينتج

$$\text{كم} = \text{كم ر} \quad \text{و ر ط} = \text{ر ط} \quad \text{و} = \text{و ط} = \text{و ط}$$

فينتج جت ا م = جت ا م و ظت ا م = ظت ا م وقت ا م = وقت ا م
وما يضاف الى قوس او زاوية ليبلغ كل منهما ١٨٠ يسمى متما وحينئذ يكون
قوس ا م او مساويه الذي هو ا م متما للقوس ا م ويمكن اعادة
ما سبق من الخواص هنا بان يقال ان القوسين المتامين لبعضهما خطوطهما
المثلثية متساوية لـ كن اشاراتهم مختلفة ما عدا الجيب وقاطع التمام
فان اشارتهم لا تختلفان

واذا اريد تبين هذه الخواص بمعادلات رمز الى قوس ا م بحرف س
فيحدث ا م = ا م = ١٨٠ - س ويكتب هكذا

$$\left. \begin{array}{l} \text{جاسه} = \text{جا} \quad (١٨٠ - \text{س}) \\ \text{ظاسه} = \text{ظا} \quad (١٨٠ - \text{س}) \\ \text{قاسه} = \text{قا} \quad (١٨٠ - \text{س}) \end{array} \right\} (١) \quad \left. \begin{array}{l} \text{جتسه} = \text{جت} \quad (١٨٠ - \text{س}) \\ \text{طتسه} = \text{طت} \quad (١٨٠ - \text{س}) \\ \text{قتسه} = \text{قت} \quad (١٨٠ - \text{س}) \end{array} \right\} (٢)$$

ومن المعلوم ان كلاما من الجيب والظل والقاطع ينقص كلما زاد القوس من ٩٠
الى ١٨٠ وان كلاما من جيب التمام وظل التمام وقاطع التمام يزداد ومتى انطبق خط
وم على و ا يحدث

$$\begin{array}{l} \text{جا} \quad ١٨٠ = \text{و} \quad \text{ظا} \quad ١٨٠ = \text{و} \quad \text{قا} \quad ١٨٠ = \text{و} \quad \text{نق} \\ \text{جت} \quad ١٨٠ = \text{نق} \quad \text{و ظت} \quad ١٨٠ = \text{نق} \quad \text{لا وقت} \quad ١٨٠ = \text{لا} \\ \text{وهذه المقادير كلها يمكن ان تنتج من معادلة (١) بفرض س} \quad ١٨٠ = \text{س} \\ \text{معادلة} \end{array}$$

$$\text{جت س} = \text{جت} \quad (١٨٠ - \text{س}) \quad \text{مثلا تناول الى}$$

جت ١٨٠ = - جت ٠ وحيث ان جت ٠ = نق يكون جت ١٨٠ = - نق كما هو الواجب

(١٠)

وتطبيق الجبر على الهندسة كثيرا ما تستعمل فيه اقواس مشتقة على جملة من انصاف الدوائر فيلزم افادة قوانين لتحويل هذه الاقواس كلها الى الربع الاول ولنعتبر للاختصار الجيب وجيب التمام دون غيرهما لكثرة استعمالهما ومن حيث ان كل قوس اكبر من نصف محيط الدائرة يتركب من قوس اقل من ١٨٠ زائدا ١٨٠ مرة او مرارا ينبغي اولا ان نبين ما هو جيب قوس ١٨٠ + سه وجيب تمامه بفرض سه > ١٨٠ فنقول

ليكن القوس المرموز اليه بحرف سه الدائريين ٠ و ١٨٠ ام فاذا زدنا على ام نصف محيط م ا ك فالقوس ام ا ك = ١٨٠ + سه ويكون لهذين القوسين جيبان متساويان هما م ب و د هـ او و ك و و ك ولكن حيث ان لهذين الخطين وضعين متعاكسين يجب اتباع الاصطلاح المتقدم في بند (٧) بان تجعل لهما اشارتان مختلفتان ويلزم كذلك ان يكون جيبا التمام و ب و و ب متساويين ومختلفي الاشارة وحيث نذكر

$$\left. \begin{aligned} \text{جا} &= (١٨٠ + \text{سه}) \\ \text{جت} &= (١٨٠ + \text{سه}) \end{aligned} \right\} (٢)$$

وايضا اذا ضيف ٣٦٠ الى ام فالظاهر اننا نرجع الى نقطة م الاصلية من المحيط وحيث نذكر جميع الخطوط المثلثية نؤول الى حالتها الاولى فينتد يحدث

$$\left. \begin{aligned} \text{جا} &= (٣٦٠ + \text{سه}) \\ \text{جت} &= (٣٦٠ + \text{سه}) \end{aligned} \right\} (٣)$$

وبالجملة فقوس سه ايا ما كان اي سواء كان كبيرا او صغيرا اذا زيد عليه ١٨٠ او عدد فرد من نصف المحيط فان نهايته تنتقل من احدى نهايتي رأس

القطر الى الاخرى وحينئذ يتضح ان اسارتي الجيب وجيب التمام تحتلفان
ولكن اذا زيد على $\text{س} \text{ } ٣٦٠$ اوجد زوج من نصف المحيط فان الخطوط
المثلثية لا تتغير ابدا حيث رجع ت الى النقطة الاصلية من المحيط

(١١)

ولنتكلم الآن على الاقواس السلبية اعني الاقواس المرسومة وقت تحرك
نصف القطر الذي كان منطبقا للاعلى وا الى الجهة المضادة للجهة الاولى
فنفرض ان ام وا الذين هما قوسان متساويان ومتعاكسا الوضع
سرموزا اليهما برمزي $\text{س} \text{ } - \text{س}$ ومن البين حينئذ ان جيبيهما
 $\text{م} \text{ } - \text{م}$ و $\text{د} \text{ } - \text{د}$ كذلك اي متساويان ومتعاكسا الوضع ولايجاد جيبي
تماميهما ننسبه على ان تماميهما اللذين هما $\text{س} \text{ } - \text{س}$ و $\text{س} \text{ } + \text{س}$
مبينان بقوسى $\text{م} \text{ } - \text{م}$ و $\text{م} \text{ } - \text{م}$ اللذين جيبيهما $\text{م} \text{ } - \text{م}$ و $\text{د} \text{ } - \text{د}$
متساويان ومتشابهما الوضع فيحدث

جا (- س) = - جاسه و جت (- س) = جت س (٤)
وهذه القوانين عامة ايا ما كانت الاقواس وان كان قوسا ام وا في الشكل
اقل من $\text{س} \text{ } ٩٠$ فان من الواضح انه اذا ازداد هذان القوسان كيفما يراى بشرط
ان يكونا متساويين فجيبي $\text{م} \text{ } - \text{م}$ و $\text{د} \text{ } - \text{د}$ لا يزالان متساويين ومختلفين
الوضع فعلى هذا يكون دائما جا (- س) = - جاسه

واذا فرضنا فى المعادلة الثانية من هذا القانون اقواسا اكبر من $\text{س} \text{ } ٩٠$ كقوسى
 $\text{ا} \text{ } - \text{م}$ و $\text{ا} \text{ } - \text{د}$ وجعلنا $\text{س} \text{ } = \text{ا} \text{ } - \text{م}$ و $\text{س} \text{ } = \text{ا} \text{ } - \text{د}$
فتمام $\text{س} \text{ } ٩٠$ - س للقوس الاول يصير سالبا ومبيننا فى الشكل بقوس $\text{م} \text{ } - \text{م}$
الموضوع على يسار نقطة - وتمام $\text{س} \text{ } ٩٠$ + س للقوس الثانى يصير
مساويا لقوس - $\text{ا} \text{ } - \text{د}$ وموضوعا دائما على يمين نقطة - وحيث ان الجيبين
 $\text{م} \text{ } - \text{م}$ و $\text{د} \text{ } - \text{د}$ لهذين القوسين اللذين كل منهما تمام للاخر متساويان
ووضعهما واحد بالنسبة لقطر - يحدث دائما

جت (- س) = جت س فحينئذ يظهر ان قانونى (٤)

عامان

وليتنبه الى ان جيب تمام قوس ما وجبا كان اوسا لبامعين دائماً بالبعد
السكائن بين المركز وموقع الجيب في المقدار والوضع

(١٢)

والمناسب ان ننبه قبل التوغل في الفن اولا على ان قوانين (١) (٢) (٣)
(٤) (٥) التي استخرجت يمكن تطبيقها على جميع الاقواس الموجبة
والسالبة ولا نستعمل للاختصار الا الجيب وجيب التمام
فنقول اولا قد سبق في بند (٩) قانونا

$$\text{جا س} = \text{س} \text{ جا } (١٨٠ - \text{س}) \text{ و}$$

جت س = - جت (١٨٠ - س) اللذان لم يبرهن فيهما الا على الاقواس
الموجبة المحصورة بين صغر و ١٨٠ وبتغيير س فيهما بكمية ١٨٠ + س
يصيران هكذا

جا (١٨٠ + س) = جا (س) و جت (١٩٠ + س) = - جت (س - س)
وهاتان المتساويتان وانحتملان بمقتضى ما تقدم في قانوني (٢) و (٤)
ويظهر من ذلك ان القوس يمكن ان يزداد ١٨٠ مرة او اكثر الى غير نهاية
ووضع - س بدل س يتبين منه بواسطة الطريقة السابقة ان هذين
القانونين صحيحان فحينئذ يمكن تطبيقهما على جميع الاقواس الممكنة

وثانيا على ان قوانين (٢) التي برهن فيها على الاقواس الموجبة يمكن تطبيقها
على الاقواس السالبة بتغيير س فيهما بكمية - س فتصير هكذا

$$\text{جا } (١٨٠ - \text{س}) = - \text{جا } (\text{س} - \text{س}) \text{ جا س}$$

$$\text{جت } (١٨٠ - \text{س}) = \text{جت } (\text{س} - \text{س}) = - \text{جت س}$$

وهذان القانونان يرجعان الى قانوني (١)

وثالثا على ان زيادة ١٨٠ على اى قوس كان اى سواء كان + س او
- س لا يحدث تغيرا في اشارات الجيب وجيب التمام فحينئذ زيادة ٣٦٠
على القوس المذكور لا تحدث فيهما تغيرا ابدا وعلى هذا فقوانين (٣) يمكن

نطبقها على الاقواس السالبة

ورابعاً على ان قوانين (٤) لا تحتاج الى براهين اخرى لان من المعلوم انه يمكن تغيير $س$ فيها بكمية $-س$

(١٣)

ليس لنا الا ان اسهل من تحويل الخطوط المثلثية في اى قوس كان الى الربع الاول من المحيط فاذا اردنا معرفة جيب قوس يساوى ١٠٢٩ طرح من هذا العدد ٣٦٠ مرة او مرتين بقدر ما يمكن فالباقي ٣٠٩ فينتج حينئذ بمقتضى قوانين (٣) $جا س = جا ٣٠٩$ فاذا طرح ايضا من هذا العدد ١٨٠ يوجد بمقتضى قانونى (٢) $جا س = - جا ١٢٩$ وباخذ متمم ١٢٩ الذى هو ٥١ يحدث $جا س = - جا ٥١$ كما فى نمرة (٩) ويمكن اختصار العملية اكثر من ذلك لان $جا ٥١ = جت (٩٠ - ٥١) = جت ٣٩$ فينتج يكون $جا س = - جت ٣٩$

فاذا كان القوس المعلوم $س = - ١٠٢٩$ يكون للجيب اشارة مخالفة للاشارة الاولى كما فى نمرة (١١) ويحدث معنا $جا س = جت ٣٩$

السلام على الاقواس المقابلة لجيب

معلوم او جيب تمام كذلك الخ

(١٤)

ما سبق من التفاصيل ينتج تفصيلاً مفيداً هو انه يوجد جملة اقواس خطوطها المثلثية واحدة ولنفرض ان خطاً من هذه الخطوط معلوم وان المطلوب البحث عن الاقواس المختلفة المتعلقة بهذا الخط فنفرض كما فى شكل (١) ان $جا س = ر$ ونأخذ على نصف القطر ور العمود على وا خط $وك = ر$ ومن نقطة ك نمرر مم موازياً لخط وا ومن المعلوم انه يلزم جعل جميع الاقواس المنتهية بنقطتي م و مقدار الجيب س

وبالمرز الى قوس ام بحرف ع والى ١٨٠ بحرف ف يكون ام
 $=$ ف - ع وجميع الاقواس الموجبة المنتهية بنقطتى م و م
 محصورة فى هاتين المتسلسلتين

ع ٢ ف + ع ٤ ف + ع ٦ ف + ع الخ
 ن - ع ٣ - ع ٥ - ع ٧ - ع الخ
 ومن حيث ان ا - ام = ٢ ف - ع و ا - ام = ف + ع
 فزيادة اى عدد كان من المحيط على هذه الاقواس وجعل جميع الاقواس
 الناتجة سالبة تحدث جميع الاقواس السالبة المقابلة للجيب المعلوم وهى

- ٢ + ع - ٤ + ع - ٦ + ع الخ
 - ف - ع - ٣ - ع - ٥ - ع الخ
 وجميع اقواس هذه المتسلسلات الاربعة يمكن حصرها فى قانونين سهلين وذلك
 لان قوس ع مضاف فى هاتين المتسلسلتين الى جميع المضارب الزوجية
 لكمية ف سواء كانت تلك المضارب موجبة او سالبة ومطروح
 فى المتسلسلتين الاخرين من المضارب الفردية لكمية ف فاذا رمزنا بحرف
 ك الى كمية ما صحيحة سواء كانت موجبة او سالبة يمكن ان نصير صفرا لجميع
 الاقواس المطلوبة تكون منحصرة فى هذين القانونين

س = ٢ ك ف + ع و س = (١ + ك ٢) ف - ع (١)
 وهذا على فرض ان كمية ك موجبة فلو كانت سالبة بان كان جاسه = -
 وجب نقل ك على وك فى جهة و - وحينئذ فالاقواس المنتهية
 بنقطتى ك و ك هى مقادير س واذا فرضنا ان ا - ك = ع
 ظهر ان ا - ك = ٢ ف - ع و ا - ك = ٢ ف - ع و ا - ك = ع
 - ف مقادير س الموجبة والسالبة المقابلة لجيب وك تكون
 ع ٢ ف + ع ٤ ف + ع الخ ٣ ف - ع ٥ ف - ع ٧ ف - ع الخ
 - ٢ ف + ع - ٤ ف + ع - ٦ ف + ع الخ ٣ ف - ع - ٥ ف - ع - ٧ ف - ع
 - ٣ ف - ع الخ

الاقواس المطلوبة حينئذ هي التي في هذه المتسلسلات

ع ٢+ف+ع ٤+ف+ع الخ ٣+ف+ع ٥+ف+ع الخ
 - ٢+ف+ع - ٤+ف+ع - ٦+ف+ع - ٣+ف+ع - ٥+ف+ع
 الخ فالقوس المعلوم في هذه المتسلسلات الأربع مضاف الى جميع مضارب
 كمية ف سواء كانت موجبة او سالبة فالقانون العمومي للاقواس
 المطلوبة هو

$$س = ك + ف + ع \quad (٣)$$

هذا اذا كان الظل المعلوم موجبا واما اذا كان سالبا فينقل على ا^١ تحت
 نصف قطر او - حينئذ فقوس ع يكون دائريين ٩٠ و ١٨٠
 كقوس ا-م ولا يخفى انه يمكن تقدير الظل باى مقدار كان

(١٧)

لا نتكلم الآن على الحالة التي فيها القوس معين باحد الخطوط المثلثية
 الباقية لان من المعلوم ان الاقواس التي جيوبها وجيوب تمامها وظلها
 متحدة تكون قواطعها وقواطع تمامها كذلك وسيظهر لك ذلك في بند (٢٠)
 عند استخراج الارتباطات التي بين الخطوط المثلثية فينتج من ذلك ان
 قوانين (١) (٢) (٣) هي التي تحدث حين يعلم ق^٢ س^٣ وقاس^٤
 و ظت س^٥

ولا يروح عليك ان كمية ع في هذه القوانين اصغر الاقواس الدائرة بين
 ٠ و ٣٦٠ المقابلة للخط المعلوم وان ف نصف محيط الدائرة وان
 ك عدد ما صحى اى موجب او سالب ويمكن ان يكون صفرا

كيفية تحويل الجيوب وجيوب التمام
 الى نسب بسيطة

(١٨)

لا يستعمل القوس في حساب المثلثات الا لقياس احدى الزوايا ولا يعتبر طوله
 الحقيقي بل المعتبر النسبة التي بين محيط الدائرة والقوس الذي هو جزء منها اى

النسبة المعينة بعدد درجات الفوس ولا يخفى انها تكفي في تعيين الزاوية فان
جميع الاقواس المحصورة في زاوية مجعول رأسها مركزا تحتوي على عدد واحد
من الدرجات ايا ما كانت انصاف اقطار هذه الاقواس

فالنسبة التي بين الخطوط المثلثية لهذه الاقواس وبين انصاف اقطار
الدائرة التي هي جزء منها ليست متعلقة الا بعدد هذه الدرجات فخطوط
م ب و م ب و م ب الخ التي هي جيوب اقواس متشابهة كما في
(شكل ٣) يحدث منها

$$\frac{م ب}{م و} = \frac{م ب}{م و} = \frac{م ب}{م و} \text{ وهذه النسب هي التي عرفت حين علمت الزاوية}$$

للاجيوب ويقاس على ذلك جيوب التمام والظلال الخ فيشاهد ان الذي
جرت عليه الحسابات هو نسب الخطوط المثلثية الى نصف القطر لا اطوالها
الحقيقية وطريقة ذلك سهلة وذلك ان يجعل $\frac{1}{2}$ قطر الدائرة التي فيها الخطوط
المذكورة واحدا المقادير لان مقادير هذه الخطوط الرقمية هي عين النسب وتسمى
هذه النسب في بعض الاحيان جيوبا طبيعية وجيوب تمام كذلك وظلالا كذلك
وظلال تمام كذلك الخ

فمذه هي طريقة تحويل الخطوط المثلثية الى نسب بسيطة وكان الاحسن
تقديم هذه الطريقة لكن لعدم مخالفة العادة في التعليم لا يبدل $\frac{1}{2}$ القطر
بفرض آخر في القوانين الاساسية بل يرمز اليه دائماً فيها بكلمة نق

(١٩)

وزيادة على ذلك متى عملت عملية حساب وجعل فيها $\frac{1}{2}$ القطر واحدا سهل
علينا تغيير النتائج دائماً حتى تصير لايقة بكل فرض وذلك لانه بمقتضى
ما سبق يظهر لنا ان نسب الجيوب وجيوب التمام الخ الى $\frac{1}{2}$ القطر في الفرض
الثاني كنسب الجيوب وجيوب التمام اليه في الفرض الاول فينبغي ان لا يحتاج
في النتائج المعلومة الى تغيير الكميات جا و ظاء الخ بكميات $\frac{ج}{نق}$

و $\frac{ظاء}{نق}$ الخ

فاذا فرض

فاذا فرض مثلان بين قوسى ج و د النسبة

$$\text{ظاء} = \frac{\text{ا-جت ج}}{\text{ا+ح ج}} \text{حدث بالوضع}$$

$$\frac{\text{ا-جت ج}}{\text{ا+ح ج}} = \frac{\text{ظاء}}{\text{نق}}$$

وبالاختصار من غير تبديل نق بفرض آخر يحدث

$$\text{ظاء} = \frac{\text{نق}(\text{نق-جت ج})}{\text{نق+ح ج}}$$

وينبغي التنبيه الى ان الصلoul المطلق لنصف القطر هو ا وغيره هو نق كما فى البعد الذى يساوى ميسترا او ميترين فيئتذ نصف القطر لانتهاؤه وفى الحقيقة كل خط مشاى لزاوية معلومة معين باعداد مختلفة بحسب فرض نصف القطر لكن لهذه الاعداد مع العدد الذى يبين $\frac{1}{4}$ القطر نسبة واحدة وهذه النسبة هى التى تجرى عليها الحسابات فقط

فى بيان ارتباطات الخطوط المثلثية ببعضها بعض

(٢٠)

مثلثات شكل (١) تعرف منها النسب الآتية بين الستة خطوط المثلثية ولنشرع فى تفصيل ذلك فنقول

اولا مثلث وم پ من حيث انه قائم الزاوية يحدث عنه

$$\text{م پ} + \text{و پ} = \text{و م}$$

وثانيا مثلثا وم پ و وتا من حيث انهما متشابهان يحدث عنهما

$$\text{ا ت} : \text{م پ} :: \text{وا} : \text{و پ} \text{ و } \text{وت} : \text{وم} :: \text{وا} : \text{و پ}$$

وثالثا مثلثا وم ك و وطر يحدث عنهما ايضا

سط : م :: ور : وك و وط : وم :: ور : وك
 ولنفرض ان قوس ام = ج و نصف قطر وم = نق ثم نضع
 رموز الخطوط الثلثية عوضا عنها بان نضع جا ج عوضا عن م ب
 و جت ج عوضا عن وب الخ فالخمس متناسبان السابقة يحدث عنها
 (١) ح^٢ = ج^٢ + جت^٢ = نق^٢

$$(٢) \text{ ظا } = \frac{\text{نق حا}}{\text{جت}}$$

$$(٣) \text{ ظت } = \frac{\text{نق جت}}{\text{حا}}$$

$$(٤) \text{ فا } = \frac{\text{نق}}{\text{جت}}$$

$$(٥) \text{ قت } = \frac{\text{نق}}{\text{جا}}$$

فاما قانون (١) فيستعمل لتعيين الجيب بواسطة معرفة جيب التمام
 وبالعكس فاذا علم جا يعلم

جت $\pm \sqrt{\text{نق}^2 - \text{جا}^2}$ فيحدث معنا مقداران متساويان
 ومختلفا الاشارة لان جيبى التمام وب و المتساويين والمختلفى الوضع
 يقابلان جيبي واحداهو وك

واما قوانين (٢) (٣) (٤) (٥) فيعرف منها مقادير الظل والقاطع الخ
 اذا علمت مقادير الجيب وجيب التمام

(٢١)

ولاجل تطبيقها على الاعمال يؤخذ المقدار جا ٣٠ = $\frac{1}{4}$ نق الذى سلف
 في بند (٤) وبواسطته يسهل اولا حساب جيب تمام ٣٠ و نظله
 وقاطعه ثم اذا اعتبر ان تمام ٣٠ هو ٦٠ امكن عمل هذا الجدول

$$\text{جا } ٣٠ = \text{جت } ٦٠ = \frac{\text{نق}}{٢}$$

$$\text{ظا } ٣٠ = \text{ظت } ٦٠ = \frac{\sqrt{٣} \text{ نق}}{٣}$$

$$\frac{٣٦}{٣} \text{ نق } ٢ = ٩٠ = \text{ ق ت } ٩٠$$

$$\frac{٣٦}{٣} \text{ نق } ٣ = ٩٠ = \text{ ج ت } ٩٠$$

$$\frac{٣٦}{٣} \text{ نق } ٤ = ٩٠ = \text{ ظ ت } ٩٠$$

$$\frac{٣٦}{٣} \text{ نق } ٥ = ٩٠ = \text{ ق ت } ٩٠$$

(٢٢)

القوانين السابقة في بند (٢٠) وان كانت ناتجة من الشكل الذي فيه قوس
 $٩٠ >$ مطردة ويظهر ذلك بسهولة اذ لم تعتبر الا المقادير
 المطلقة للخطوط المثلثية لان هذه الخطوط يتكون منها دائماً مثلثات
 قوائم الزاوية ومتشابهة يمكن ان يحدث عنها نتائج كالسابقة في بند (٢٠)
 ولا يخفى اننا اذا اعتبرنا دائماً الاشارات اللازمة لكل منها لا يتغير قانون (١)
 لاحتوائه على مربعات فقط فحينئذ لا يبقى علينا الا معرفة هل للظل والقاطع
 الخ في بقية القوانين اشارات مطابقة لوضعها

وحيث ان الجيب وجيب التمام في الربع الاول من المحيط اعني من ٩٠ الى
 ٩٠ موجبات يحدث من القوانين الاربعة مقادير موجبة كما هو الواقع
 وحيث ان الجيب موجب وتمام الجيب سالب في الربع الثاني تكون مقادير الظل
 والقاطع وظل التمام سالبة وتمام القاطع فيبقى موجباً على حاله والشكل
 هو المتمكفل ببيان الاشارات اللازم ان تكون لهذه الخطوط وحيث ان الجيب
 وجيب التمام في الربع الثالث من المحيط سالبان يكون مقداراً (٢) و (٤)
 موجبين مع ان مقدارى (٣) و (٥) سالبان وهذا ما يلزم بوضع
 الاربعة خطوط ومن حيث ان الجيب سالب وجيب التمام موجب في الربع
 الرابع من المحيط فاما مقادير (٢) و (٤) و (٥) سالبة والمقدار (٣)
 موجب ويظهر ذلك من الشكل وحيث زادت الاقواس عن ٣٦٠
 فالجيب وجيب التمام لقوس ما كقوس $٣٦٠ +$ ترجع اليهما
 مقادير واشارات كالتى لقوس $>$ بهينها فحينئذ ينتج من القوانين الاربعة

نتائج كالتى سبقت بعينها وفي الحقيقة ظل قوس $90^\circ + \gamma$ وقاطعة
الخ يلزم ان يكون لهم مقدار كقادر ظل وقاطع قوس γ بعينها
ولنفرض الاقواس سالبة فنقول

حيث ان جا $(-\gamma) = -$ جا γ و جت $(-\gamma) =$ جت γ
كما سبق في بند (١١) ينتج من تغيير اشارة القوس ان مقادير الظل والقاطع
وظل التمام وقاطع التمام المعلومة في القوانين تأخذ اشارات مختلفة بدون
ان يتغير عظمها مع ان القاطع يبقى على حاله وهذه النتائج هي التى بينها الشكل
بعينها

ويمكن ان يضاف ان قوانين اقواس 90° و 90° و 180° الخ
السابقة غير صحيحة وحينئذ لا توجد مثلثات ولكن يشاهد بسهولة ان هذه
القوانين يحدث عنها نتائج موافقة لهذه الاقواس فاذا فرضنا مثلا ان γ
 $= 90^\circ$ يحدث جا $90^\circ =$ نق و جت $90^\circ = 0$
و حينئذ يصير ظا $90^\circ =$ لا و قا $90^\circ =$ لا و ظت $90^\circ =$
 0 و قت $90^\circ =$ نق فهذه المقادير هي التى يلزم
ايجادها حينئذ وليتنبه الى ان المقدار ظا $90^\circ =$ لا يجب ان يكون له
علامة الالتباس \pm لان المقدار المذكور هو نهاية الظلال الموجبة
التي تحدث معنا بازياد القوس من 0 الى 90° ونهاية الظلال السالبة
التي تحدث معنا ايضا بنقص القوس من 180° الى 90° وهذا التنبيه
يجرى في بقية الخطوط المثلثية الصالحة لان تصير غير منتهية

ويمكن ان يستنتج من ذلك ان عموم القوانين الخمسة ليس مقيدا بشئ
(٢٣)

قد اكتفى في عمومية قانونى (٤) و (٥) بالبرهنة على عمومية قانونى
(٢) و (٣) وذلك ان قانونى (٤) و (٥) يمكن استنتاجهما من قانونى
(٢) و (٣) بوضع 90° عوضا عن γ فيهما وبالجملة فكما
وجد ارتباط بين الخطوط المثلثية وبرهن على جميع مقادير الاقواس الممكنة

يصح ان يبدل كل من هذه الاقواس بتمامه وذلك يرجع الى تغيير الجيوب والظلال والقواطع الخ بجيوب التمام وظلال التمام وقواطع التمام وبالعكس

(٢٤)

الارتباطات الخمسة (١) (٢) (٣) (٤) (٥) يمكن ان يستنتج منها قوانين اخر ولندكر المشهور منها فنقول

اولا اذا ضرب قانونا (٢) (٤) في بعضهما حدث

$$\text{ظا } \delta \times \text{ظت } \delta = \text{نق}^{\delta} \quad (٦)$$

اعنى ان نصف القطر وسط متناسب بين الظل وظل التمام وهذه النتيجة يمكن ان تنتج من المثلثين المتشابهين وتا و وطـ

وثانيا ينتج اننا من قانون (٢)

$$\text{نق}^{\delta} + \text{ظا}^{\delta} = \text{نق}^{\delta} + \frac{\text{نق}^{\delta} \text{جا}^{\delta}}{\text{جت}^{\delta}} = \frac{\text{نق}^{\delta} (\text{حا}^{\delta} + \text{جت}^{\delta})}{\text{جت}^{\delta}}$$

$$\text{وحيث ان جا}^{\delta} + \text{جت}^{\delta} = \text{نق}^{\delta} \text{ و قا}^{\delta} = \frac{\text{نق}^{\delta}}{\text{جت}^{\delta}} \text{ يحدث}$$

$$\text{نق}^{\delta} + \text{ظا}^{\delta} = \text{قا}^{\delta} \quad (٧)$$

وهذا القانون واضح في المثلث القائم الزاوية وتا وبمثل هذه الطريقة يوجد هذا القانون

$$\text{نق}^{\delta} + \text{ظت}^{\delta} = \text{قت}^{\delta} \quad (٨)$$

وهذا القانون ينتج من السابق بلا واسطة بوضع $90^{\circ} - \delta$ بدل δ

وثالثا ينتج من قانوني (٣) و (٥)

$$\frac{1}{\text{قا}^{\delta}} = \frac{\text{جت}^{\delta}}{\text{نق}^{\delta}} = \frac{1}{\text{قت}^{\delta} \text{ و نق}^{\delta}} = \frac{1}{\text{نق}^{\delta}}$$

وبإضافة المربعات والتبسيطه على ان جت^δ + جا^δ = نق^δ

$$\text{يحدث} \quad \frac{1}{\text{قا}^{\delta}} = \frac{1}{\text{قت}^{\delta}} + \frac{1}{\text{نق}^{\delta}} \quad (٩)$$

وبالجملة فتى علم احد الخطوط المثلثية الستة فالارتباطات الخمسة (١)
 (٢) (٣) (٤) (٥) نستعمل لمعرفة الخطوط الخمسة الباقية ولا يحتاج
 ذلك الا لاجراء حل سهل لمعادلات فاذا اريد مثلا إيجاد الجيب وجيب التمام
 بواسطة الظل تؤخذ معادلتا (١) و (٢) اللتان هما

$$\frac{\text{نق ج ا}}{\text{ج ا}} = \text{ظ ا} \text{ و } \text{نق ا} = \text{ج ا} + \text{ج ت ا}$$

ومن هاتين المعادلتين نستخرج مقادير ج ا و ج ت ا ومن المعادلة
 الثانية يحدث نق ا ج ا = ظ ا ج ت ا وبواسطة الاولى
 يحدث بسهولة

$$\frac{\pm \text{نق ا}}{\text{ظ ا} + \text{نق ا}} = \text{ج ت ا} \text{ و } \frac{\pm \text{نق ظ ا}}{\text{ظ ا} + \text{نق ا}} = \text{ج ا}$$

وعلامتا \pm يدلان على انه يوجد جيبان وجيبا تمام متساويان ومتقابلان
 في الوضع ومقابلان لظل واحد وهذا مبين في الشكل ولا بد من اخذ الاشارات
 العليا مع بعضها والسفلى كذلك والا فلا يوجد

$$\frac{\text{نق ج ا}}{\text{ج ا}} = \text{ظ ا}$$

في بيان تركيب القوانين التي يستخرج منها $\text{ج} + \text{د}$ و $\text{ج} - \text{د}$
 وتماجي جيبهما

(٢٦)

المسئلة المراد حلها هي ان المعلوم جيبا قوسي ج و د وجيبا تماميهما
 والمطلوب إيجاد جيب وجيب تمام مجموعهما وتفاضلهما

والجواب ان نفرض كما في شكل (٤) ان قوس $\text{ا} = \text{ج}$ و قوس
 $\text{ب} = \text{د}$ ونوصل ونرث $\frac{1}{2}$ قطر و ب الذي يقطعه عمودا
 عليه في منتصف ك ونوصل ايضا $\frac{1}{2}$ قطر وا والاعدة ر ب و
 ث ر و ط فيحدث

$$\text{ر ب} = \text{ج ا} \text{ و } \text{و ب} = \text{ج ت ا} \text{ و } \text{ث ك} = \text{ج ا} \text{ و } \text{و ك} = \text{ج ت ا}$$

و ا+د = ث و ث+د = جا و و+د = جت (د+د)
 و ا+د = د و د+د = جا (د-د) و و+د = جت (د-د)
 و تنزل ایضا که عمود اعلی و ا و نمد کف و د موازی الی او
 مثلثا شکف و کد یکونان متساوین لان زوایا هما متساوین و ضلع
 شک = کد قیكون ضلع د = کف و د = کث فیهذا الفرض
 یحدث

جا (د+د) = ث+د = ف+د = ث+د = ک+د = ث
 جت (د+د) = و+د = ه+د = و+د = ه+د = کف
 جا (د-د) = د+د = ک+د = ک+د = ک+د = ث
 جت (د-د) = و+د = و+د = د+د = و+د = کف
 و مثلث و رپ مشابه لثلث و کھ لتوازی خطی رپ و کھ
 کما انه مشابه لثلث شکف لکون اضلاعهما المتناظرة اعمدة علی بعضهما
 فیینتدینتج

کھ : رپ :: وک : و+د : کھ : جا : جت : ث
 وھ : وپ :: وک : و+د : وھ : جت : جت : ث
 ث : وپ :: شک : و+د : شک : جت : جت : ث
 کف : رپ :: شک : و+د : کف : جا : جا : ث
 و من هذه المتناسبات یحدث

$$\begin{array}{lcl} \text{کھ} = \frac{\text{جا جت د}}{\text{ث}} & \text{و} & \text{وھ} = \frac{\text{جت د جت د}}{\text{ث}} \\ \text{ث} = \frac{\text{جت د جا}}{\text{ث}} & \text{و} & \text{کف} = \frac{\text{جا جا}}{\text{ث}} \end{array}$$

و بوضع هذه المقادیر فی جا (د+د) و جت (د+د) الخ یحدث
 (۱) جا (د+د) = $\frac{\text{جا جت د} + \text{جت د جا}}{\text{ث}}$

$$(٢) \text{ جت } (د+ج) = \frac{\text{جت د جت د-جا د جاد}}{\text{نق}}$$

$$(٣) \text{ جا } (د-ج) = \frac{\text{جاد جت د-جت د جاد}}{\text{نق}}$$

$$(٤) \text{ جت } (د-ج) = \frac{\text{جت د جت د+جا د جاد}}{\text{نق}}$$

(٢٧)

يظهر من الشكل الذي استعملناه انه قاصر قصورا ما على القوانين السابقة
لانه مفروض فيه ان قوسى د و د موجبان وان مجموعهما $د+ج > ٩٠^\circ$
وان د اكبر من د فى القوانين المتعلقة بكمية د-ج مع ان الصحيح
انه يمكن تحويل الرسوم بسهولة الى كل حالة من الاحوال الباقية لكن هذه
الاحوال عديدة فليس علينا بهذه الطريقة معرفة كون القوانين عامة ام لا
ولنذكر الطريقة المختارة فنقول

اولا يمكن ان يحذف فى قانونى (٣) و (٤) قيد د < د وذلك لانه متى
كان د > د يعرف بمقتضى ما فى بند (١١) انه يحدث

جا (د-ج) = جا (د-ج) جت (د-ج) = جت (د-ج)
لكن حيث ان د < د يمكن بواسطة قانونى (٣) و (٤) استنتاج جا (د-ج)

و جت (د-ج) بوضع د بدل د و د بدل د وحينئذ يشاهد ان
القانون الاول لم تتغير فيه الا الاشارة واما الثانى فعلى حاله وحينئذ نتج لنا

القوانين التى نتجت لكمية جا (د-ج) و جت (د-ج) فى الحالة التى
فيها د < د وعلى هذا فالقوانين الاربعة تتألف فى جميع الحالات التى

فيها د و د موجبان ومجموعهما $د+ج > ٩٠^\circ$ وحينئذ يجوز
ان يقدر فى القوانين لكل من هذه الاقواس اى مقدار كان بين ٠ و ٩٠°

وثانيا انه حيث كان يمكن استخراج القوانين المتعلقة بتمفاضل د-ج
من القوانين التى تفيد جا (د+ج) بوضع د بدل د يكون قانونا

(١) و (٢) صالحين لمقادير د التى بين ٠ و ٩٠° ولجميع

مقادير د التي بين - ٤٥ و + ٤٥ ° وانا اقول حينئذ ان هذين
القانونين صالحان لمقادير كمية د السالبة مأخوذة من ٠ الى - ٤٥ °
فاذا فرضنا ان $ع > ٤٥$ ° وان $د = - ع$ يحدث

$$جا(د + ع) = جا(-ع + د) = - جا(ع - د) \text{ و}$$

$$جت(د + ع) = جت(-ع + د) = جت(د - ع)$$
وحيث ان قوسى ع و د داخلان في نهاية المقادير الثابت فيها قانونا (١)
و (٢) ينتج

$$\frac{- جا(ع - د) + جت(د - ع) حاد}{نق} = جا(د + ع) = جا(ع - د)$$

$$\frac{جت(د + ع) = جت(ع - د) = \frac{جت(د - ع) + حاد(ع - د) حاد}{نق}}$$

وحيث ان $د = - ع$ ينتج لنا كما في بند (١١)

$$جا(ع - د) = حاد(ع - د) حاد$$

وحينئذ يرجع القانونان السابقان الى قانونى (١) و (٢)

وثالثا نبين الآن على انه يمكن فى قانونى (١) و (٢) ان ترادفهايات كىتى

د و د السالبة والموجبة الى غير نهاية فيفرض ان $د = ٩٠ + ع$

وان ع قوس ما دائريين - ٤٥ ° و + ٤٥ ° فباخذ تمامهما يوجد

$$جا(د + ع) = جا(٩٠ + ع + د) = جت(د - ع) حاد = جت(د - ع)$$

$$\frac{جت(د - ع) حاد - حاد(د - ع) حاد}{نق} = (د + ع)$$

$$جت(د + ع) = جت(٩٠ + ع + د) = جا(د - ع) حاد = جا(د - ع)$$

$$\frac{جا(د + ع) - حاد(د + ع) حاد}{نق} = جا(د + ع)$$

لكن بالاختصار ان المعلومة يوجد

جا = جا (٩٠° + ع) = جت (ع -) = جت ع

جت ح = جت (٩٠° + ع) = جا (ع -) = - جا ع

حينئذ يمكن ابدال جت ع بكمية جا ح و جا ع بكمية - جت ح وهذه الطريقة يرجع الى قانوني (١)

و (٢) لكن اذا جعل ع بين ٤٥° و ٤٥° + ٩٠°

فقوس ٩٠° + ع او ح يمر بجميع المقادير التي من ٤٥° الى ١٣٥°

وحينئذ يشاهد ان نهاية ح الموجبة تزداد حتى تصل الى ١٣٥° وبتكرار

هذا البرهان يتضح ان هذه النهاية يمكن ان تزداد ٩٠° و ٩٠° + ٩٠°

وهكذا الى غير نهاية

ثم ان البرهان المذكور في الحالة الثانية وهو البرهان على ان قانوني (١) و (٢)

كما يصلحان لمقادير ح الموجبة الاقل من ٤٥° يصلحان ايضا لمقادير

هذه الكمية السالبة يمكن ان يصلح للحالة التي فيها نهاية ح الموجبة تخالف

٤٥° فحيث كانا صالحين لاي مقدار موجب من مقادير ح يكونان

صالحين لاي مقدار سالب من مقاديرها

وظاهر انه يمكن اجراء البراهين التي سبقت في قوس - على قوس ح

اي انه يمكن ان يزداد كل من نهايتيه الى غير نهاية وبهذا يثبت ان قانوني (١)

و (٢) صالحان لاي مقدار كان لقوس ح و كذلك قانونا (٣) و (٤)

بالضرورة

في بيان قوانين ضرب الاقواس وقسمتها

(٢٨)

ولنفرض من الان فصاعدا ان نق = ا بحيث ان الجيوب وجيوب التمام

الخ لا تعتبر الانسبا بسيطة كما وضح ذلك في بند (١٨) وعلى هذا تصير القوانين

التي في بند (٢٠) و (٢٦) هكذا

$$\text{جا } r + \text{جت } r = 1$$

$$\frac{\text{جا } r}{\text{جت } r} = \text{ظا } r$$

$$\frac{\text{جت } r}{\text{جا } r} = \text{ظن } r$$

$$\frac{1}{\text{جت } r} = \text{قا } r$$

$$\frac{1}{\text{جا } r} = \text{قت } r$$

$$\text{جا } (r \pm s) = \text{جا } r \text{ جت } s \pm \text{جت } r \text{ جا } s$$

$$\text{جت } (r \pm s) = \text{جت } r \text{ جت } s \mp \text{جا } r \text{ جا } s$$

(٢٩)

اذا تقرر هذا نتج من فرضنا $r = s$ في مقداری $\text{جا } (r + s)$ و $\text{جت } (r + s)$ هذان القانونان

$$\text{جا } r^2 = \text{جا } r \text{ جت } r \quad (١)$$

$$\text{جت } r^2 = \text{جت } r - \text{جا } r \quad (٢)$$

وهما يستعملان لحساب جيب ضعف قوس اذا علم جيب هذا القوس وجيب تمامه

(٣٠)

فاذا فرضنا ان $r = s$ حدث من المقادير المتقدمة اولاً

$$\text{جا } r^3 = \text{جا } r \text{ جت } r^2 + \text{جت } r \text{ جا } r^2$$

$$\text{جت } r^3 = \text{جت } r - \text{جا } r \text{ جت } r^2 - \text{جا } r \text{ جا } r^2$$

وبوضع مقادير جا r^2 و جت r^2 عوضاً عنهم واختصار الحواصل

$$\text{بواسطة ارتباط جا } r + \text{جت } r = 1 \text{ يحدث}$$

$$\text{جا } 3 = 3 \text{ جا } 4 - 4 \text{ جا } 3 \quad (3)$$

$$\text{جت } 3 = 4 \text{ جت } 4 - 3 \text{ جت } 3 \quad (4)$$

وبالاستمرار على هذه الكيفية يرتقى الى مضارب ٤ و ٥ و ٦ الخ
وبالجملة فهذه القوانين عمومية لضرب الاقواس تأتي في الباب الرابع

(٣١)

ولنشرع الآن في القوانين المتعلقة بتقسيم الاقواس فنفرض اولاً ان المراد
ايجاد جيب نصف قوس وجيب تمامه فاذا بدلنا جت في قوانين (١) و (٢)

بكمية $\frac{1}{2}$ جت حدث

$$\text{جا } \frac{1}{2} \text{ جت } \frac{1}{2} = \text{جا } \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\text{جت } \frac{1}{2} = \text{جا } \frac{1}{2} \text{ جت } \frac{1}{2} \quad (6)$$

ومعلوم انه يوجد

$$\text{جت } \frac{1}{2} + \text{جا } \frac{1}{2} = 1 \quad (7)$$

فاذا علم جت جت فلا يحتاج الالحل معادلتى (٦) و (٧) فبطرح الاولى
من الثانية ثم اضافتها اليها يحدث

$$\frac{\text{جت} + 1}{2} = \text{جت } \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جت} - 1}{2} = \text{جا } \frac{1}{2}$$

وهذان القانونان هما اللذان يستعملان لمعرفة $\text{جا } \frac{1}{2}$ و $\text{جت } \frac{1}{2}$
اذا علم جت جت ويلزم في هذين القانونين التنبيه على ان علامة الجذر تكون
مسيبقة باشارة \pm

ثم ان سبب ايجاد مقدارين متساويين ومختلفى الاشارة لكل من مجموعى
 $\text{جا } \frac{1}{2}$ و $\text{جت } \frac{1}{2}$ سهل بالتنبيه اولا على ان قوس جت ليس داخل فى هذه
المقادير بل الداخل جيب تمامه لان هذه المقادير تفيد ايضا جيب وجيب
تمام $\frac{1}{2}$ جميع الاقواس التى جيب تمامها واحد وبمقتضى ما سبق فى بند (١٥)

تعيين هذه الاقواس من قانون

س = ٢ ك ف \pm ع مفروضافيه ان حرف ع اصغر قوس موجب
مقابل الجيب التمام المعلوم وان ف نصف المحيط وان ك عددا صحيح
فيلزم حينئذ ايجاد جميع مقادير كيتي جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$ المحصورة في
جا (كف $\pm \frac{1}{4}$ ع) و جت (كف $\pm \frac{1}{4}$ ع)
فان كان ك زوجا تكون كمية كف احد مضارب $2^3 \cdot 60$ ويمكن
حذفها بدون تغيير الجيب وجيب التمام كما سبق في بند (١٠) وبذلك
يحدث

$$\text{جا } \left(\pm \frac{1}{4} \text{ ع} \right) = \pm \text{جا } \frac{1}{4} \text{ ع} \quad \text{و}$$

$$\text{جت } \left(\pm \frac{1}{4} \text{ ع} \right) = \text{جت } \frac{1}{4} \text{ ع}$$

وان كان ك فردا يمكن ان تحذف ايضا كمية كف لكن مع تغيير اشارات
الجيب وجيب التمام كما سبق في بند (١٠) فبذلك يحدث

$$- \text{جا } \left(\pm \frac{1}{4} \text{ ع} \right) = \pm \text{جا } \frac{1}{4} \text{ ع} \quad \text{و}$$

$$- \text{جت } \left(\pm \frac{1}{4} \text{ ع} \right) = - \text{جت } \frac{1}{4} \text{ ع}$$

فيشاهد حينئذ انه قد وجد معنام مقداران متساويان ومختلفا لاشارة لمجهولى
جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$

(٣٢)

فاذا كان المعلوم هو الجيب بدل جيب التمام كفى ان يوضع في قانوني (٨)
مقدار جت $\frac{1}{4}$ الذى هو ١٧ - ح' بدلا عنه وحيث ان هذا الجذر
مسبق باشارة \pm يكون لكل من مجهولى جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$ اربعة
مقادير

ويمكن ايجاد هذه المقادير بطريقتا اخرى وذلك بان يؤخذ قانونا (٥) و (٧)
اللان هما

$$٢ \text{ جا } \frac{1}{4} \text{ جت } \frac{1}{4} = \text{جا } \frac{1}{4}$$

$$\text{جت } \frac{1}{4} + \text{جا } \frac{1}{4} = ١$$

ومن هذين القانونين تستخرج مقادير جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$ وبإضافة
الاول الى الثانى ثم طرحه منه واخذ جذر الحاصل والباقى يحدث

$$\text{جت } \frac{1}{4} + \text{جا } \frac{1}{4} = \sqrt{17 + \text{جاد}}$$

$$\text{جت } \frac{1}{4} - \text{جا } \frac{1}{4} = \sqrt{17 - \text{جاد}}$$

ومن ذلك تحدث بسهولة المقادير المطلوبة التى هى

$$\text{جا } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{17 + \text{جاد}} - \frac{1}{4} \sqrt{17 - \text{جاد}} \quad (٩) -$$

$$\text{جت } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{17 + \text{جاد}} + \frac{1}{4} \sqrt{17 - \text{جاد}} \quad (١٠) -$$

وبسبب وجود علامتى الجذر فى هاتين الكميتين يكون لكل منهما اربع مقادير
وذلك ان هاتين الكميتين لا بد وان يفيدا جيب وجيب تمام نصف جميع
الاقواس التى جيون بها واحدة لكن حيث كانت هذه الاقواس بمقتضى ما سبق
فى بند (١٤) ناتجة من

$$\text{سه} = 2\text{كف} + \text{ع} \quad \text{و} \quad \text{سه} = (1 + \text{ك}^2) \text{ف} - \text{ع}$$

يجب ان يكون مقدارا جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$ مفيدين لجيب وجيب تمام
الاقواس الميئة فى

$$\text{كف} + \frac{1}{4}\text{ع} \quad \text{و} \quad (\frac{1}{4} + \text{ك}) \text{ف} - \frac{1}{4}\text{ع}$$

لكنه يمكن حذف كف مع ابقاء اشارات الجيب وجيب التمام او تغييرهما
بحسب كون ك زوجا او فردا فيلزم حينئذ ان يكون لمجهولى جا $\frac{1}{4}$ و
جت $\frac{1}{4}$ اربع مقادير هى جا $\frac{1}{4} = \pm \frac{1}{4}\text{ع}$ و جا $\frac{1}{4} = \pm \frac{1}{4}(\text{ف} - \frac{1}{4}\text{ع})$ و جت $\frac{1}{4} = \pm \frac{1}{4}\text{ع}$ و
جت $\frac{1}{4} = \pm \frac{1}{4}(\text{ف} - \frac{1}{4}\text{ع})$ فيشاهد انهما متساوية متنى
ومختلفة الاشارة فاذا كان $\text{ع} = 90^\circ$ يحدث $\frac{1}{4}\text{ع} = 45^\circ$
و $\frac{1}{4}\text{ف} - \frac{1}{4}\text{ع} = 45^\circ$ وحينئذ تؤول هذه المقادير الاربعة الى مقدارين
(تنبيه) حيث كان مقدار كية ف دالا على 180° ينتج ان كلا من قوسى
 $\frac{1}{4}\text{ع}$ و $\frac{1}{4}\text{ف} - \frac{1}{4}\text{ع}$ تمام للآخر وحينئذ تكتب المعادلة السابقة هكذا

جا $\frac{1}{4} = \pm$ جا $\frac{1}{4} ع$ و جا $\frac{1}{4} = \pm$ جت $\frac{1}{4} ع$
 جت $\frac{1}{4} = \pm$ جت $\frac{1}{4} ع$ و جت $\frac{1}{4} = \pm$ جا $\frac{1}{4} ع$
 اعني ان مقادير جا $\frac{1}{4}$ عين مقادير جت $\frac{1}{4}$ وهذا ما تبينه قوائين
 (٩) و (١٠)

بقي علينا مشكلة يلزم حلها وهي انه كيف يمكن تمييز احدى المقادير الاربعة
 السابقة لينتخب لكمية جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$ اذا علم قوس γ وجيبه
 وذلك لانه لا يلزم ان يؤخذ الامقدار واحد
 وحلها ان يعتبر لاجل الاختصار جا $\frac{1}{4}$ فقط وباخذ الجذور مع اشاراتها
 المختلفة تكتب المقادير الاربعة هكذا

$$\begin{aligned} \text{جا } \frac{1}{4} = \pm & \frac{(\sqrt{1-\gamma} - \sqrt{1+\gamma})}{4} \\ \text{جا } \frac{1}{4} = \pm & \frac{(\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1-\gamma})}{4} \end{aligned}$$

فيظهر لنا اولان المقدارين الاولين متساويان ومختلفا الاشارة وكذلك
 المقداران الاخيران ثم اذا ربيع اثنين من الاربعة صار $\frac{1}{4} >$ والاخيران
 بالتربيع بصيران $\frac{1}{4} <$ وحيث كان معلوما كما في بند (٨) ان $\gamma = ٤٥^\circ$
 $=$ جت $٤٥^\circ = \frac{1}{4}$ يكون المقداران الاولان بالغاء الاشارات
 اصغر من جا ٤٥° والاخيران اكبر منه لكن لا يخفى انه اذا علم قوس سهل
 بالضرورة ان يعين هل جيب $\frac{1}{4}$ هذا القوس موجب او سالب وهل هو اصغر
 من جيب ٤٥° او اكبر منه وبذلك يبطل كلما ليس منتهيا وهذه البراهين
 تجري في جيب التمام

فاذا فرضنا مثلا ان $\gamma > ٩٠^\circ$ يكون جا $\frac{1}{4}$ موجبا واقل من
 جا ٩٠° و جت $\frac{1}{4}$ موجبا ايضا لكنه اكبر من جت ٩٠°
 فيلزم حينئذ اخذ المقادير التي في قوائين (٩) و (١٠) مع الاشارات
 السابقة لها

وهذه القوائين توافق كما هو مشاهد الاحوال التي فيها القوس اقل من ٩٠°
 كبقية القوائين المثبتة الكثيرة الاستعمال في الاحوال السابقة

ولنتكلم الآن على تقسيم الأقواس الى ثلاثة اقسام فنقول اذا وضعنا $\frac{1}{p}$ عوضا عن γ في قوانين (٣) و (٤) التي سبقت في بند (٣٠) تصير هذه القوانين هكذا

$$\text{جا } \gamma = \text{جا } \frac{1}{p} \gamma - \text{جا } \frac{1}{p} \gamma^2$$

$$\text{جت } \gamma = \text{جت } \frac{1}{p} \gamma - \text{جت } \frac{1}{p} \gamma^2$$

ولنفرض مثلاً ان جت γ معلوم والمطلوب إيجاد مقدار جت $\frac{1}{p} \gamma$ فنضع جت $\gamma = \text{صه}$ و جت $\frac{1}{p} \gamma = \text{صه}$ فتصير المعادلة الثانية هكذا

$$\text{صه}^3 - \frac{3}{2} \text{صه} - \frac{1}{2} \text{صه} = 0$$

وهذه هي المعادلة المطلوب حلها لاجل إيجاد جت $\frac{1}{p} \gamma$ ولنبرهن بدون احتياج الى توضيحات جبرية على ان جذور هذه المعادلة الثلاثة حقيقية

فن حيث ان جميع التمام هنما معلوم وقانون الأقواس المقابلة لجيب التمام المذكور هو $\pm \text{ك} \pm \text{ع}$ كما سبق في بند (١٥) تكون جذور معادلة (١١) محصورة في معادلة

$$\text{صه} = \text{جت } \left(\frac{\text{ك} \pm \text{ع}}{3} \right)$$

ولا يخفى ان العدد الصحيح الذي هو ك ليس له الا احد المقدارين الثلاثة التي هي صه و $1 + \text{صه}$ و $1 - \text{صه}$ بفرض ان صه عدد صحيح بان نفرض على التوالي ان $\text{ك} = \text{صه}$ و $\text{ك} = 1 + \text{صه}$ و $\text{ك} = 1 - \text{صه}$ فيحذف الدوائر غير المحتاج اليها نجد

$$\text{صه} = \text{جت} = \frac{ع \pm ٢ \times ٥٣}{٣} = \text{جت} (٢ \pm ٢) = \text{جت} (٢ \pm ٢) = \text{جت} (٢ \pm ٢) = \text{جت} (٢ \pm ٢)$$

$$\text{صه} = \text{جت} = \frac{ع \pm ٢ (١ + ٥٣)}{٣} = \text{جت} (٢ \pm ٢) + \frac{ع \pm ٢}{٣} = \text{جت} (٢ \pm ٢) + \frac{ع \pm ٢}{٣}$$

$$\text{صه} = \text{جت} = \frac{ع \pm ٢ (١ - ٥٣)}{٣} = \text{جت} (٢ \pm ٢) - \frac{ع \pm ٢}{٣} = \text{جت} (٢ \pm ٢) - \frac{ع \pm ٢}{٣}$$

فيشاهد ان المقدارين الاخيرين عين المقدارين اللذين قبلهم ما فحينئذ لا يوجد من هذا كله الا ثلاثة مقادير مختلفة وهي

$$\text{صه} = \text{جت} = \frac{ع}{٣} \quad \text{و} \quad \text{صه} = \text{جت} = \frac{ع + ٢}{٣} \quad \text{و} \quad \text{صه} = \text{جت} = \frac{ع - ٢}{٣}$$

وقد يتفق ان مقدارين من المقادير السابقة متساويان وذلك كالأول والثالث اذا كان $ع = ٢$

ولا نطيل الكلام على تقسيم القواس لان ما سبق من التفاصيل كاف للسار ولا في هذا الفرض

في بيان القوانين المتعلقة بالظلال

(٣٤)

ولنشرع الآن في البحث عن ايجاد ظل مجموع قوسين او فاضلهما متى علم ظل كل من هذين القوسين وبمقتضى الارتباط الذي بين الجيب وجيب التمام والظل كما سبق في بند (٢٨) يحدث

$$\frac{\text{جا } (د + ر)}{\text{جت } (د + ر)} = \frac{\text{جا } د}{\text{جت } د}$$

وبابدال جا $(د + ر)$ و جت $(د + ر)$ بمقداريهما اللذين سبقا في بند (٢٨) يحدث

$$\frac{\text{جا } د \text{ جت } د + \text{جت } د \text{ جا } د}{\text{جت } د \text{ جت } د - \text{جا } د \text{ جا } د} = \frac{\text{جا } (د + ر)}{\text{جت } (د + ر)}$$

ولاجل ان لا توجد الاظلال فقط يقسم البسط والمقام على جت $د$ جت $د$

فيحدث

$$\frac{\frac{\text{جاء} + \text{جاء}}{\text{جاء} + \text{جاء}}}{\frac{\text{جاء} + \text{جاء}}{\text{جاء} + \text{جاء}}} = (\text{س} + \text{ح})$$

ولكن $\frac{\text{ح}}{\text{جاء} + \text{جاء}} = \text{ظا}$ و $\frac{\text{جاء}}{\text{جاء} + \text{جاء}} = \text{ظا}$ فينبغي يحدث

$$(1) \frac{\text{ظا} + \text{ظا}}{1 - \text{ظا} + \text{ظا}} = (\text{س} + \text{ح})$$

وبالكيفية السابقة يوجد ايضا فاضل هذين القوسين هكذا

$$(2) \frac{\text{ظا} - \text{ظا}}{1 + \text{ظا} - \text{ظا}} = (\text{س} - \text{ح})$$

(٣٥)

اذا فرض ان $\text{س} = \text{ح}$ في القانون السابق (١) يحدث ظل ضعف قوس اذا علم ظل هذا القوس

$$(3) \frac{2\text{ظا}}{1 - \text{ظا}} = 2\text{ظا}$$

وايضاً اذا فرض ان $\text{س} = 2\text{ح}$ في القانون (١) يوجد 3ظا الخ

(٣٦)

ولتبحث الآن عن ظل $\frac{1}{\text{ح}}$ اذا علم ظل ح فنقول بوضع $\frac{1}{\text{ح}}$ بدل ح في القانون الاخير تحدث معادلة

$$\text{ظا} = \frac{2\text{ظا} + \frac{1}{\text{ح}}}{1 - \text{ظا} + \frac{1}{\text{ح}}}$$

وهذه المعادلة تؤول الى معادلة بدرجة ثانية وهي

$$\text{ظا}^2 + \frac{1}{\text{ح}}\text{ظا} - \frac{2}{\text{ح}} = 0$$

ومن هذه المعادلة يستخرج

$$\text{ظا } \frac{1}{r} = \frac{1}{\text{ظا } \delta} (-1 \pm \sqrt{1 + \text{ظا}^2 \delta})$$

وحيث ان حذم معادلة (٤) الاخير هو $1 -$ يعلم بدون حل هذه المعادلة ان حاصل ضرب مقداري $\text{ظا } \frac{1}{r} = 1 -$ فينبئ اذا كان $\text{ا} \text{ و } \text{ا} \text{ من شكل (٥) هما المقداران المذكوران والموضوعان بوضع لايق باشارتهما يكون معنا } \text{ا} \times \text{ا} = \text{ا} \text{ و } \text{ا} \text{ وحيث تكون زاوية } \text{ا} \text{ قائمة او يكون قوس } \text{م} = 90^\circ \text{ والمآل واحد}$ وكان يسهل ان يبين بمقتضى هذه المسئلة لاى شئ يكون لظل $\frac{1}{r}$ مقداران ليس الا ا لكن تركنا للقارئ هذا العمل الذى لا صعوبة فيه بمقتضى ما تقدم فى الاحوال المشابهة لذلك

(٣٧)

كثيرا ما توجد هذه القوانين

$$(٥) \quad \sqrt{\frac{1 - \text{جت } \delta}{1 + \text{جت } \delta}} = \text{ظا } \frac{1}{r}$$

$$(٦) \quad \frac{\text{جا } \delta}{1 + \text{جت } \delta} = \text{ظا } \frac{1}{r}$$

$$(٧) \quad \frac{1 - \text{جت } \delta}{\text{جا } \delta} = \text{ظا } \frac{1}{r}$$

وهذه القوانين تنبج بالسهولة من القوانين السابقة فيوجد

$$\text{ظا } \frac{1}{r} = \frac{\text{جا } \frac{1}{r}}{\text{جت } \frac{1}{r}} = \sqrt{\frac{1 - \text{جت } \delta}{1 + \text{جت } \delta}} \quad \text{انظر (٣١)}$$

$$\text{ظا } \frac{1}{r} = \frac{\text{جا } \frac{1}{r} \text{ جت } \frac{1}{r}}{\text{جت } \frac{1}{r}} = \frac{\text{جا } \delta}{1 + \text{جت } \delta} \quad \text{انظر (٣١) و (٢٩)}$$

$$\text{ظا } \frac{1}{r} = \frac{\text{جا } \frac{1}{r}}{\text{جت } \frac{1}{r}} = \frac{1 - \text{جت } \delta}{\text{جا } \delta} \quad \text{انظر (٣١) و (٢٩)}$$

قوانين اخرى كثيرة الاستعمال

(٣٨)

ما سبق في بند (٢٨) من القوانين المتعلقة بجيب وجيب تمام مجموع القوسين
الذى هو $\gamma + \delta$ وفاضلها الذى هو $\gamma - \delta$ ينتج عنه
كثير من القوانين المستعملة عند الفلكيين ولقطة مصر على المشهور منها
فنعقول

اذا جمع اثنان من تلك القوانين او طرحا من بعضهما يحدث

$$٢ \text{ جا } \gamma \text{ ح ت } \delta = \text{جا } (\gamma + \delta) + \text{جا } (\gamma - \delta)$$

$$٢ \text{ ج ت } \gamma \text{ جا } \delta = \text{جا } (\gamma + \delta) - \text{جا } (\gamma - \delta)$$

$$٢ \text{ ج ت } \gamma \text{ ج ت } \delta = \text{ج ت } (\gamma - \delta) + \text{ج ت } (\gamma + \delta)$$

$$٢ \text{ جا } \gamma \text{ جا } \delta = \text{ج ت } (\gamma - \delta) - \text{ج ت } (\gamma + \delta)$$

وهذه القوانين تستعمل لتحويل ضرب احد الجيوب في احد جيوب التمام
او تحويل حاصل ضرب جيبى تمام في بعضهما او جيبين في بعضهما الى مجموع
خطين مثلثيين او فاضلها

(٢٩)

ولنرمز الى اى فوسين بجرفى ه و ونفرض ان $\gamma + \delta = \text{ه}$
و $\gamma - \delta = \text{و}$ فيحدث $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\text{ه}} (\text{ه} + \text{و})$ و $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\text{ه}} (\text{ه} - \text{و})$
(ه - و) وبوضع هذا المقادير في القوانين السابقة وتغيير ترتيب الطرفين
تصير هكذا

$$\text{جا ه} + \text{جا و} = ٢ \text{ جا } \frac{1}{\gamma} (\text{ه} + \text{و}) \text{ ج ت } \frac{1}{\delta} (\text{ه} - \text{و})$$

$$\text{جا ه} - \text{جا و} = ٢ \text{ ج ت } \frac{1}{\gamma} (\text{ه} + \text{و}) \text{ جا } \frac{1}{\delta} (\text{ه} - \text{و})$$

$$\text{ج ت ه} + \text{ج ت و} = ٢ \text{ ج ت } \frac{1}{\gamma} (\text{ه} + \text{و}) \text{ ج ت } \frac{1}{\delta} (\text{ه} - \text{و})$$

$$\text{ج ت و} - \text{ج ت ه} = ٢ \text{ جا } \frac{1}{\gamma} (\text{ه} + \text{و}) \text{ جا } \frac{1}{\delta} (\text{ه} - \text{و})$$

وكثيرا ما تستعمل هذه القوانين في الحسابات اللوغاريتمية لتحويل مجموع
او فاضل الى حاصل ضرب

وبالجملة قبل التقسيم والتنبيه ع وما على ان

$$\frac{1}{\text{جـ ت هـ}} = \frac{\text{جاو}}{\text{ظا}} = \frac{1}{\text{ظ ت هـ}}$$

ينج من القوانين السابقة قواني اخرى كثيرة الاستعمال ايضا هي

$$\frac{\text{جا هـ} + \text{جاو}}{\text{جا هـ} - \text{جاو}} = \frac{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})} = \frac{\frac{\text{ظا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{ظا}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}$$

$$\frac{\text{جا هـ} + \text{جاو}}{\text{ج ت هـ} + \text{ج ت و}} = \frac{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})} = \frac{\frac{\text{ظا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}$$

$$\frac{\text{جا هـ} + \text{جاو}}{\text{ج ت و} - \text{ج ت هـ}} = \frac{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})} = \frac{\frac{\text{ظ ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}$$

$$\frac{\text{جا هـ} - \text{جاو}}{\text{ج ت هـ} + \text{ج ت و}} = \frac{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})} = \frac{\frac{\text{ظ ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} - \text{و})}$$

$$\frac{\text{جا هـ} - \text{جاو}}{\text{ج ت و} - \text{ج ت هـ}} = \frac{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})} = \frac{\frac{\text{ظ ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}$$

$$\frac{\text{ج ت هـ} + \text{ج ت و}}{\text{ج ت و} - \text{ج ت هـ}} = \frac{\frac{\text{ج ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})} = \frac{\frac{\text{ظ ت}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}{\frac{\text{جا}}{\text{ر}} (\text{هـ} + \text{و})}$$

ولنخص اول هذه القوانين بهذه العبارة فنقول نسبة مجموع جيبى قوسين الى
فاضل هذين الجيبين \equiv نسبة ظل نصف مجموع الجيبين الى ظل نصف
فاضلهم

(٤١)

بالاطلاع على بعض مؤامرات هذا العلم يشاهد نحو يلات مثلثية لم يتعرض
لاصولها فالاوفق حينئذ تحقيقها ولاصعوبة في ذلك
فاذا اريد مثلا تحقيق ارتباط

$$\text{جا } (د+د) \text{ جا } (د-د) = \text{جا } د - \text{جا } د$$

يبدل اولا جا $(د+د)$ و جا $(د-د)$ بمقاديرهما السابقة في بند (٦٨) فيجد

جا $(د+د)$ جا $(د-د) = \text{جا } د \text{ جت } د - \text{جت } د \text{ جا } د$
 ثم يبدل جت $د$ و جت $د$ بمقاديرهما ا - جا $د$ و ا - جا $د$
 وبعد الاختصار توجد المعادلات المطلوبة
 واذا اريد تحقيق هذه المعادلة

$$\text{جت } د = \frac{\text{ا - ظا } \frac{1}{د}}{\text{ا + ظا } \frac{1}{د}}$$

يبدل ظا $\frac{1}{د}$ بمقداره $\frac{\text{جا } \frac{1}{د}}{\text{جت } \frac{1}{د}}$ فيؤول الطرف الثاني الى

$$\frac{\text{جت } \frac{1}{د} - \text{جا } \frac{1}{د}}{\text{جت } \frac{1}{د} + \text{جا } \frac{1}{د}}$$

وحيث كان يعلم من بند (٢٠) و (٢٩) ان
 جت $\frac{1}{د} + \text{جا } \frac{1}{د} = ١$ و جت $\frac{1}{د} - \text{جا } \frac{1}{د} = \text{جت } د$
 آل المقدار السابق الى جت $د$ وبذلك يثبت المطلوب
 وهال بعض صورته كرها على سبيل التمرين فنقول

$$\text{جت } (د+د) \text{ جت } (د-د) = \text{جت } د - \text{جت } د$$

$$\text{ظا } (د+د) = \frac{\text{ا + ظا } د}{\text{ا - ظا } د}$$

$$\text{جت } د = \frac{١}{\text{ا + ظا } د}$$

$$\text{ظا } د + \text{ظا } د = \frac{\text{جا } (د+د)}{\text{جت } د}$$

$$\text{ظا } د + \text{ظا } د + \text{ظا } د = \text{ظا } د$$

والقانون الاخير يفرض فيه ان $7 + 5 + 4 = 180^\circ$ وهويبين انه
يمكن اختيار ثلاث كميات مجموعها مساو لحاصل ضربها بطرق عديدة

في بيان براهين هندسية على القوانين المتقدمة

(٤٢)

قد رأيت بعد ان رتبت بطريق الهندسة قوانين جيب وجيب تمام قوى
 $7 + 5$ و $7 - 5$ اني استعملت الحساب الجبري لتنتج منها قوانين اخرى
ومن هنا نتج ان القوانين الاولى لجميع الاقواس المتقدمة صحيحة كما ان القوانين
الاخرى كذلك وهذه خاصية الطرق الجبرية الاصلية ولواستعملنا طرق الرسم
الهندسي لتوهم دائماً انه لا يمكن تطبيقها الا على الاحوال المبينة في شكل
مخصوص لكن من حيث ان مزيته تصير الحقيقية محسوسة ونشرع في البرهنة
على النتائج الاصلية المتقدمة بها فقول

(٤٣)

اذا كان المعلوم جيب قوس وجيب تمامه والمراد ايجاد جيب وجيب تمام
ضعف القوس المذكور يفرض ان قوس $ا - ر = ر ث = 7$
كما في شكل (٦) وترسم الخطوط المساحية كما هي مبينة في الشكل
فيحدث

جا $7 = ا ب$ و جت $7 = و ب$ و جا $2 = ث ك = 2$
بن $7 = و جت 2 = و ك = و ن - و ن - ك ن = و ن - ا ف$
فالمثلث القائم الزاوية و ب ا ينتج منه

$$\frac{ا ب \times و ب}{وا} = بن \quad و \frac{و ب}{او} = و ن \quad و \frac{ا ب}{او} = ا ف$$

فاذا ابدلت هذه الخطوط المختلفة برمزها المثلثي وفرض ان نصف القطر وا
= ١ يحدث

$$\begin{aligned} جا 2 &= 2 بن = 2 حا 7 جت 7 \\ جت 2 &= 7 و ن - ا ف = جت 7 حا 7 \end{aligned}$$

وهذان القانونان هما قانونا (١) و (٢) المقررين في بند (٢٩)

(٤٤)

إذا كان المعلوم جت ح والمراد إيجاد جا $\frac{1}{4}$ ح و جت $\frac{1}{4}$ ح
يؤخذ قوس ا ث = ح كما في شكل (٧) ويوصل ث ب عمودا على
قطر ا ب ثم يوصل وتر ا ث ورث وكذلك نصف قطري ود و ه
وهذان الخطان يقطعان الوترين المذكورين في منتصفيهما أي في نقطتي ل
و ر فبفرض ان او = ا د آتما يحدث وب = جت ح و ا ب
= ا - جت ح و ر ب = ا + جت ح و ا ث = ٢ جا $\frac{1}{4}$ ح و
ر ث = ٢ جت $\frac{1}{4}$ ح

وحيث كان كل وتر وسطا متناسبا بين القطر والجزء المجاور له ينتج

$$\text{ا ث} = \text{ا ب} \times \text{ا ر} \text{ او } \text{ا ح} = \frac{1}{4} \text{ ح} = ٢ (١ - \text{جت ح})$$

$$\text{ر ث} = \text{ا ب} \times \text{ر ب} \text{ او } \text{ا جت ح} = \frac{1}{4} \text{ ح} = ٢ (١ + \text{جت ح})$$

ومن ذلك تستنتج القوانين المعلومة في بند (٣١)

$$\text{وهي جا } \frac{1}{4} \text{ ح} = \sqrt{\frac{١ - \text{جت ح}}{٢}} \text{ و جت } \frac{1}{4} \text{ ح} = \sqrt{\frac{١ + \text{جت ح}}{٢}}$$

(٤٥)

إذا كان المعلوم جيب قوس وجيب تمامه والمراد إيجاد جيب ثلاثة أمثاله
ذلك القوس وتمام جيب ثلاثة أمثاله

يفرض كما في شكل (٨) ان نصف القطر و ب = ا وقوس ا ب = ر ث

= ث د = ح فالثلث المتساوي الساقين ر د و مشابه لثلاث ر د ر

لان زاوية ر د مشتركة في المثلثين وزاوية ر د التي مقياسها

$\frac{1}{4}$ ر ه او ر د = ر د فحينئذ يقال

ر ر : ر د :: ر د : و ر ومن هنا ينتج

$$\text{ر ر} = \text{ا ج} = \text{ا ح}$$

وبعد ب ح موازيا ر ر يكون ر ح = ر ر = ا ح

سـ ر = ور + وسـ ٢ - ور × وف
ولكن حيث كان سـ ر = (ر + سـ) = ر + سـ ٢ - ور × وف
يكون سـ ر + سـ ٢ - ور × سـ = ور + وسـ ٢ - ور × وف
ومن هذا يستخرج

$$٢ ور × وف = ور - ر + وسـ ٢ - سـ ٢ - ور × سـ = وسـ ٢ - ور -$$

$$٢ ور × سـ = سـ ٢ - ٢ - ظا ٢$$

$$١ - ظا ٢ ظا ٢ = \frac{ظا ٢ - ١}{ور}$$

فلو ابدل سـ ف و وف في ظا (٢ + ١) بمقاديرهما لنتج القانون
المعلوم في بند (٣٤) الذي هو

$$\frac{ظا ٢ + ظا ٢}{١ - ظا ٢} = ظا (٢ + ١)$$

وبهذه الكيفية السهلة توجد مقدار ظا (٢ - ١) وحينئذ يلزم استعمال
شكل (١٠) الذي فيه قوس ا١ = ٢ - ١ فيشاهد ان الحسابات
المتقدمة تجري ايضا في هذه الحالة ولكن قد يقع هنا ان سـ ر = ظا - ظا
فعلامة الحد الثاني من بسطى مقادير سـ ف و وف تتغير بحيث يكون

$$\frac{ظا - ظا ٢}{١ + ظا ٢} = ظا (٢ - ١)$$

(٤٧)

اذا كان المراد اقامة البرهان الهندسي على هذين القانونين

$$جا ه + جا و = ٢ جا ٢ (و + ه) جت ١ (ه - و)$$

$$جا ه - جا و = ٢ جت ١ (و + ه) جا ١ (ه - و)$$

فاليتخذ كما في شكل (١١) اـ = ه و ا١ = و ويوصل و١ر سـ ث

ونصف قطر ود الذي يقطعه عمودا في وسطه في نقطة ه وينزل على او

اعمدة سـ ب و ث ك و در و ه ف ثم يمد ه ح موازيا الى او

وبمقتضى ذلك الرسم يوجد

$$ب = جا ه و ت ك = جا و ه و = \frac{جا + جا و}{٢} و = \frac{جا ه - جا و}{٢}$$

$$و ا د = \frac{١}{٢} (ه + و) و د ر = \frac{١}{٢} (جا - ه و)$$

$$و ر = ج ت = \frac{١}{٢} (ه + و) و ر د = \frac{١}{٢} (ه - و) و ه ر = جا = \frac{١}{٢} (ه - و)$$

$$و ه = ج ت = \frac{١}{٢} (ه - و)$$

لكن المثلثان المتشابهان وهف و و ر يحدث بينهما

$$هف : در :: و ه : و د و ر : و ر :: و ه : و د$$

ومن ذلك يحدث

$$ه و = \frac{در \times و ه}{و د} و = \frac{و ر \times و ه}{و د}$$

وباببدال هذه الخطوط بمقاديرها ثم تضعيفها وفرض ان نصف قطر و د = ١
توجد القوانين المعلومة المتقدمة ويحدث ايضا من المثلثين المذكورين مقادير

$$ج ت ه + ج ت و و ج ت و - ج ت ه$$

(٤٨)

اذا كان المراد اقامة البرهان الهندسي على ان نسبة مجموع جيبى قوسين الى
فاضل هذين الجيبين كنسبة ظل نصف مجموع القوسين الى ظل نصف
فاضلهم

فالرسم عين الرسم السابق في شكل (١١) ويراد على ذلك ان يمد من نقطة
د ظل س ه ت حين ينتهي في تقطى س ه و ت على امتداد نصف
القطرين و ا و د ثم يمد ايضا ر ث الى نقطة ل فهذا الوضع ينتج
بواسطة المتوازيات

$$\frac{هف}{ر ه} = \frac{ه ل}{ر ه} = \frac{د س ه}{و د}$$

ولكن حيث كان ه ل = جا ه + جا و و ر ه = جا ه - جا و

دس = طاء = ظا = (هـ + و) و دت = طاء = ظا = (هـ - و) ينتج

جاه + جاو = ظا = (هـ + و)

جاه - جاو = ظا = (هـ - و)

وبهذا يثبت المطلوب

الباب الثاني

في بيان الجداول المثلثية وفي حل المثلثات

في كيفية وضع الجداول المثلثية

(٤٩)

لاجل ان يكون هنالك كبير فائدة في ابدال الزوايا والاقواس بالجيوب وجيوب التمام الخ يلزم متى عرف القوس ان تعلم الاعداد التي تبين هذه الارتباطات وبالعكس والطريقة المستحسنة في بلوغ المطلوب ان تصنع جداول فيها الاعداد المذكورة موضوعة بجانب الاقواس المقابلة لها ولذا نشرع في كيفية عمل حساب الجيوب وجيوب التمام الخ لجميع الاقواس الثابتة من عقد الى آخرى من ١٠ الى ٢٠ وهلم جرا من التقسيم القديم وبمقتضى هذه القاعدة تتسلسل الاقواس في جداول كاليت ولا نتكلم على التقسيم الجديد ولو حري بنا عليه لسكانت الطريقة الاتية مطابقة له

فتبحث اولاً عن جيب ١٠ فتذكر ان النسبة بين المحيط وقطره

ط = الخ ٣٠١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣

ففي فرض ان نقي هو الواحد كان نصف محيط الدائرة يساوي ط وحيث كان يوجد في ١٨٠ مقدار ٦٤٨٠٠٠ ثانية يوجد اجزاء من نصف القطر هكذا

قوس ١٠ = $\frac{\text{ط}}{٦٤٨٠٠}$ الخ ٣٠١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣ (١)

وحيث كان القوس الصغير جداً مساوياً للجيبه تقر يبا يمكن ان يعتبر العدد المذكور مقداراً تقريبياً لجيب ١٠ وهذا كلام صعب يحتاج لتوضيح

ولتوضحه

ولنوضحه فنقول

(٥٠)

نبرهن اولاً على ان احداً الاقواس في الربع الاول من المحيط اكبر من جيبه
وامر من ظله فنفرض كما في شكل (١٢) ان أ ب جيب قوس أ ر
وخط أ ت ظل ذلك القوس فاذا دور الشكل حتى ان نقطة أ جاءت
في ت يحدث قوس $\text{أ ت} < \text{وتر أ ت}$ وحينئذ قوس $\text{أ ر} < \text{أ ب}$
فيكون القوس اكبر من الجيب

ويحدث ايضاً قوس $\text{أ ت} > \text{أ ت} + \text{ت ت}$ فيكون $\text{أ ر} > \text{أ ت}$ اي
ان القوس اقل من الظل

وينتج من ذلك انه اذا كان $\frac{\text{ظا}}{\text{جا}} = \frac{\text{قريباً جداً من الواحد}}{\text{النسبة}} \frac{\text{جا}}{\text{جا}}$ اكثر

قرباً للواحد منه

(٥١)

وثانياً على انه اذا تناقض احداً الاقواس على التوالي الى ان صار صفراً فالنسبة
الواقعة بين ذلك القوس وجيبه يمكن ان تقرب جداً من الواحد كما يراد بحيث
يكون ما لها الى الواحد

ثم ان القانون $\frac{\text{جا}}{\text{جت}} = \frac{\text{السابق في بند (٢٨)}}{\text{جا}} = \frac{\text{جا}}{\text{جت}}$ ينتج

$\frac{\text{ظا}}{\text{جا}} = \frac{١}{\text{جت}} = \frac{١}{\text{جت}}$ وحيث كان قوس ر يتناقض على التوالي (بفرض انه > ٩٠)

جيب تمامه يزداد ايضاً على التوالي حين يقرب من الواحد كما يراد فينتج

النسبة $\frac{١}{\text{جت}} = \frac{١}{\text{جت}}$ او مساوياً $\frac{\text{ظا}}{\text{جا}}$ تتناقض ايضاً وتؤول الى الواحد

وحيث كان القوس اكبر من جيبه واقل من ظله فالنسبة $\frac{\text{جا}}{\text{جت}}$ لا يتأني

ان تكون > ١ ولا < ١ فينتج يقال حيث ان النسبة الاخيرة يمكن

هذه الخساسة لانه حينئذ يزيد عن القوس

وبوضع مقدار جا ١٠ تحت هذا الجذر $\sqrt{١٠ - جا}$ يوجد مقدار
جت ١٠ اعني

$$جت ١٠ = ٢٤٨ ٩٩٩٨٨ ٩٩٩٩٩ ٩٩٩٩٩$$

وبعد ذلك يمكن ايجاد مقدار جيوب وجيوب تمام قوس ٢٠ و ٣٠

و ٤٠ الى ٤٥ بواسطة القوانين المعلومة التي هي

$$جا (٢٠ + ١٠) = جا ٢٠ جت ١٠ + جت ٢٠ جا ١٠$$

$$جت (٢٠ + ١٠) = جت ٢٠ جت ١٠ - جا ٢٠ جا ١٠$$

(٥٣)

قد اخذنا من المعلم قومه سنسون احد مهندسي الانجلايز طريقة اختراعها

يسهل بها عمل الحسابات مع سرعة ولذا كرها فنقول

قوانين ثمانية (٣٨) يحدث منها

$$جا (٢٠ + ١٠) = ٢ جت ١٠ جا ٢٠ - جا (٢٠ - ١٠)$$

$$جت (٢٠ + ١٠) = ٢ جت ١٠ جا ٢٠ - جت (٢٠ - ١٠)$$

فيمكن اعتبار الاقواس الثلاثة $٢٠ + ١٠$ و $٢٠ - ١٠$ و ٢٠ ثلاثة حدود

متتابعة لتواليه عددية فاضلها ١٠ فاذا رمزنا الى هذه الحدود الثلاثة بحرف

ع و ع' و ع'' يحدث

$$جا ع' = ٢ جت ع جا ع - جا ع$$

$$جت ع' = ٢ جت ع جت ع - جت ع$$

وبالقانون الاول يتبين انه متى علم جيبان متواليان يوجد الجيب التالي لهما

بضرب الاخير في $٢ جت ع$ وضرب الذي قبله في $١ -$ ثم جمع الحاصلين

وهذه القاعدة تجري ايضا في ايجاد جيب التمام

فبناء على ذلك اذا اردنا ايجاد الجيوب وجيوب التمام للاقواس من عقد الى

آخر كن ١٠ الى ٢٠ وهكذا يجعل $١٠ = ١٠$ وبالرمز الى المقداري

جا ١٠ و جت ١٠ بحرفي ه و و يحدث معنا

تقريب مضبوط وحيث قد عدد الخانات العشرية التي تكون مشتركة بين هذه المقادير وبين المقادير الناشئة من الحسابات التي وضعناها ليدل تحقيقا على عدد الخانات العشرية التي تعتبر مضبوطة في النتائج المتوسطة فاذا وجد بعد الحسابات ان التقريب غير كاف ينتخب قوس اقل من ١٠ ويجعل مبدئه كقوس ١ مثلا ثم يبده في جميع الحسابات

(٥٤)

والعادة ان استعمال الاعداد المثلثية في العمليات اقل نفعا من استعمال لوغاريتماها ولذلك كانت هذه اللوغاريتمات تستنتج من الجداول بدون واسطة لكن بابقاء فرض $\text{نق} = ١$ تصير الجيوب وجيوب التمام كسور او بالضرورة تصير لوغاريتماها سالبة ولاجل ان تجعل موجبة يجب ان يفرض $\text{نق} = ١$ وهذا يرجع الى تقسيم نق الى عشر بلايين ذات اجزاء متساوية وحيث لا يمكن ان يكون لوغاريتم الجيب او جيب التمام سالبا الا اذا كان الزاوية لا تختلف عن صفر او ٩٠ الا قليلا بحيث يمكن اهمال الفرق بينهما

ويسهل نقل نتائج الفرض الاول للفرض الثاني بان يضرب امره ١٠ في لوغاريتماها او تجمع ١٠ اليها وذلك لانه يوجد في الفرض الاول الذي فيه $\text{نق} = ١$ نسب الجيوب وجيوب التمام الى نصف القطر ومن البين انه اذا قسم نصف القطر الى م اجزاء متساوية لزم ضرب م في جميع هذه النسب حتى يعرف عددا لاجزاء المحصورة في الجيوب وجيوب التمام

(٥٥)

لوغاريتما الظلال تقدر بقانون

$$\text{ظلام} = \frac{\text{نق جاح}}{\text{ج ح}} \text{ الذي يؤول الى}$$

$$\text{لو ظام} = \text{لو جاح} + (١٠ - \text{لو ج ح})$$

بمعنى انه يلزم ان يضاف الى لوغاريتم الجيوب التمام العسدي للوغاريتم جيوب التمام

وبعد ذلك يمكن إيجاد لوغار تمام ظلالات بواسطة ارتباط
خطا حطت = نقي الذي منه يستنتج

$$\text{ظت ح} = ١٠ + (١٠ - \text{لو ظا ح})$$

ومن الجداول ما لا يوجد فيه ظلالات التمام ويشاهد انه يسهل الحاقها
بها ويكفي في ذلك ان تضاف ١٠ الى التمام العددي للوغاريتم
الظل

اما القواطع وقواطع التمام فليس لها بالجداول تعلق مانظر الى ان لوغار تماماتها
يمكن ايجادها بدون مشقة بواسطة لوغار تمام الجيوب وجيوب التمام على ان
استعمال هذين الخططين قليل جدا

واعلم ان الجداول لا تتعدى ٤٥ ° وبعد هذا العدد توجد الجيوب والظلالات
بواسطة جيبوب التمام وظلال التمام وبالعكس فمثلا اذا كان $\text{ح} < ٤٥$
يحدث

جا ح = جت (٩٠ - ح) مع ان وضع الجداول الثلاثية لا يحوج الى
حساب هذا التمام

في حساب الجيوب وجيوب التمام من ٩ الى ١٨ ومن ١٨ الى ٢٧
بزيادة تسعة تسعة وهكذا لتحقيق الجداول

(٥٦)

لاجل تحقيق الجداول التي تكلمنا عليها في آخر بند (٥٣) نتكلم على حساب
ايجاد الجيوب وجيوب التمام لاقواس من ٩ الى ١٨ وهكذا
فنقول

نفرض اولان جا ١٨ = سه فيكون سه ٢ وتر ٣٦ اي ضلع
ذي العشرة اضلاع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وحيث كان هذا الضلع
مساويا لأكبر جزء من نصف القطر المقسوم الى جزئين اكبرهما وسط متناسب
بين الخط الكلي والجزء الاصغر نفرض ان نصف القطر = ١ فيكون

$$١ : ٢ :: ٢ : ١ - ٢$$

ومن ذلك ينتج ان $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ سره
 فاذا حلينا هذه المعادلة وحذفنا منها المقدار السالب لمجهول سره الذي
 لا طائل تحته حدث

$$\text{سره} = ١٨ \text{ جا} = ٧٢ \text{ جت} = \frac{1}{4}(-٥٧+١)$$

وبواسطة هذا المقدار يوجد بالسهولة

$$١٧ - \text{سره} = ١٨ \text{ جت} = ٧٢ \text{ جت} = \frac{1}{4}(٥٧٢+١٠٧)$$

وبوضع بمقادير جا ١٨ و جت ١٨ بدل جا و جت
 في القوانين الدالة على جا ٢٢ و جت ٢٢ كما في بند (٢٩) يحدث

$$\text{جا} ٣٦ = ٥٤ \text{ جت} = \frac{1}{4}(٥٧٢-١٠٧)$$

$$\text{جت} ٣٦ = ٥٤ \text{ جا} = \frac{1}{4}(٥٧+١)$$

وبوضع مقدار جا ١٨ في القوانين التي تفيد مقادير جا $\frac{1}{4}$ و جت $\frac{1}{4}$
 باعتبار جا معلوما كما في بند (٣٢) يحدث

$$\text{جا} ٩ = ٨١ \text{ جت} = \frac{1}{4}(٥٧+٣٧) - \frac{1}{4}(٥٧-٥٧)$$

$$\text{جت} ٩ = ٨١ \text{ جا} = \frac{1}{4}(٥٧+٣٧) + \frac{1}{4}(٥٧-٥٧)$$

واذا البدلنا في هذه القوانين نفسها جا بمقدار

$$\text{جا} ٥٤ = \frac{1}{4}(٥٧+١) \text{ ينتج}$$

$$\text{جا} ٢٧ = ٦٣ \text{ جت} = \frac{1}{4}(٥٧+٥٧) - \frac{1}{4}(٥٧-٣٧)$$

$$\text{جت} ٢٧ = ٦٣ \text{ جا} = \frac{1}{4}(٥٧+٥٧) + \frac{1}{4}(٥٧-٣٧)$$

وبتذكرنا ايضا ما سبق في بند (٨) من ان جا ٤٥ = جت ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 يمكننا ان نصنع هذا الجدول

$$\text{جا } 90^\circ = 0$$

$$\text{جا } 9^\circ = 81^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{7}$$

$$\text{جا } 18^\circ = 72^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{جا } 27^\circ = 63^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \sqrt{7} - \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{جا } 36^\circ = 54^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{7}$$

$$\text{جا } 45^\circ = 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\text{جا } 54^\circ = 36^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{جا } 63^\circ = 27^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \sqrt{7} - \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{جا } 72^\circ = 18^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{جا } 81^\circ = 9^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{7}$$

$$\text{جا } 90^\circ = 0$$

ولما كانت هذه المقادير المختلفة مهمة جدا ولا تشتمل الاعلى الجذور
الترييعية كان من اللازم إيجاد مقاديرها بأى اعداد اعشارية مضبوطة وهذه
المقادير هى التى تساعد على تحقيق الحسابات المذكورة فى بند (٨٣) ويمكن
التنازل بالقسيم الى اقواس ٣٠ ٤ ٥ ١٥ ٢ ثم المترقى به الى
مضارب ١٥ ٢ المتوالية فيحدث من ذلك تحقيقات جديدة وهنالك
تحقيقات اخرى تحتاج الى مزيد تفصيل لا محل له هنا

كيفية وضع جداول كاليب واستعمالها

(٥٧)

احسن الجداول المبنية على التقسيم القديم جداول كاليب كما ان احسن
المبينة على التقسيم الجديد جداول بورده ففى مؤلف كاليب ثلاث جداول
حرية بالتمييز عماءها الاول يشتمل على لوغاريمات الاعداد الصحيحة
من ١ الى ١٠٨٠٠٠ وقد وضعنا فى كتابنا فى الجبر كيفية وضع هذا الجدول
وكيفية استعماله والثاني يشتمل على لوغاريمات الجيوب والظلال وجيوب
التمام لجميع الاقواس التى من دقيقة الى اثنين الى ثلاثة وهكذا بزيادة واحدة

واحدة على مقتضى التقسيم الجديد والثالث يشتمل على لوغاريتمات الجيوب و
 وجيوب التمام والظلال وظلال التمام من ١٠ الى ٢٠ الى ٣٠ .
 بزيادة عشر ثواني فعشر ثواني وهكذا على مقتضى التقسيم القديم ولا نتكلم هنا
 الا على الجدول الاخير لان الحسابات الفلكية والالات جارية دائماً على مقتضى
 التقسيم القديم فنقول

(٥٨)

يوجد فيه اولا لوغاريتمات الجيوب ولوغاريتمات الظلال التي تزيد ثمانية
 فمائية الى خمس درجات وكذلك لوغاريتمات جيوب التمام ولوغاريتمات ظلال
 التمام للزوايا التي تكون اكبر من ٨٥ ° فيستعان بهذا الجزء الاخير اذا كانت
 الزوايا من هذا الحد فصاعدا وبعد ذلك تأتي لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام
 والظلال وظلال التمام من ١٠ الى ٢٠ وهكذا وهي موضوعة في خانات
 ذلك الجدول معنونا عنها بجيب وجيب تمام وهكذا حتى كان الظل وظل التمام
 اكبر من نصف القطر كان لوغاريتمهما اكبر من ١٠ وقد حذفت العشرات
 من الجدول لكن لا بد من وضعها في الحسابات

ولم يلتفت الا الى الدرج التي في اول كل صحيفة اظن ان الجداول لا تزيد
 عن ٤٥ ° لكن اذا اتبته الى ان الخانات المشار اليها من اعلى بجيب وجيب
 تمام الخ مشار اليها ايضا من اسفل بجيب وجيب تمام الخ يشاهد انه بمراجعة
 الدرجات والعناوين السكائنة في اسفل كل صحيفة وكذلك الخانات المتنازلة
 الموضوعة على اليمين السكائنة فيها الدقائق والثواني تعرف لوغاريتمات الجيوب
 وجيوب التمام من ٤٥ ° الى ٩٠ ° فعلى ما ذكره شاهد حالا

لوجا ٣٠ ٣٢ ٦ = ٩,٠٥٦٦٢١٨

لوطن ٢٠ ٤٦ ٨١ = ٩,١٦٠١٥٩٦

واذا اشتملت الزاوية المعلومة على ثوان وكسورها وجب الرجوع الى الفواصل
 وعمل حسابات كالحسابات التي ذكرناها في لوغاريتمات الاعداد فان ذلك عين
 اعتبار فواصل لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام متناسبة مع فواصل

الاقواس وهذا التناسب وان لم يكن صحيحا يفيد تقريرا كافيا ويميلت الى ان هذه القواسم مشتركة بين هذين الخطين وبين لوغاريتمات الظلال وظلال التمام وانوضح ذلك بالامثلة فنقول

المثال الاول ان يكون المطلوب ايجاد لوجا $37,8$ $^{\circ} 32$ ؟

لوجا 30 $^{\circ} 32$ (فاضله مع مابعده 1836) $= 9,066218$

مقابل 7 $= \dots\dots\dots 1280,2$

مقابل 8 $= \dots\dots\dots 46,88$

لوجا $37,8$ $^{\circ} 32$ $= \dots\dots\dots 9,06760$

المثال الثاني ان يكون المطلوب لوجت $22,2$ $^{\circ} 27$ $^{\circ} 83$

لوجت 30 $^{\circ} 27$ $^{\circ} 83$ (فاضله 1836) $= 9,066218$

مقابل 7 $= \dots\dots\dots 1280,2$

مقابل 8 $= \dots\dots\dots 146,88$

لوجت $22,2$ $^{\circ} 27$ $^{\circ} 83$ $= \dots\dots\dots 9,06760$

المثال الثالث ان يكون المطلوب ايجاد لوظا $2,76$ $^{\circ} 13$ $^{\circ} 8$

لوظا 0 $^{\circ} 13$ $^{\circ} 8$ (فاضله 1486) $= 9,1603083$

مقابل 2 $= \dots\dots\dots 297,2$

مقابل 7 $= \dots\dots\dots 104,02$

مقابل 6 $= \dots\dots\dots 8,916$

لوظا $2,76$ $^{\circ} 13$ $^{\circ} 8$ $= \dots\dots\dots 9,1603493$

الرابع ان يكون المطلوب ايجاد لوظت 24 $^{\circ} 46$ $^{\circ} 81$

لوظت 10 $^{\circ} 46$ $^{\circ} 81$ (فاضله 1486) $= 9,1603083$

مقابل 2 $= \dots\dots\dots 297,2$

مقابل 7 $= \dots\dots\dots 104,02$

مقابل 6 $= \dots\dots\dots 8,916$

لوظت 24 $^{\circ} 46$ $^{\circ} 81$ $= \dots\dots\dots 9,1603493$

(٦٠)

ولنبحث الآن عن حل عكس المسئلة المتقدمة فنفرض ان المعلوم لوغار يتم
جيب وجيب تمام الخ وان المطلوب تعيين الزاوية المقابلة لذلك اللوغار يتم
فاذا فرضنا مثلا ان لو جاسه = $9,056760$ فاقرب لوغار يتماثل الجيوب
الاقل من المذهب كور في الجداول هو $9,0566218$ وهو يقابل
 $30^\circ 32'$ وفاضل اللوغار يتم المعلوم عن اللوغار يتم الذي في الجدول
 1432 والفاضل الجدولى المقابل لعدد 10 هو 1836 وحينئذ
يقسم 1432 على 1836 وتجعل عشرات خارج القسمة ثوانى
فهمذه الطريقة يوجد $8,7$ وحينئذ يكون القوس المطلوب
سه = $37,8^\circ 32'$ ولنذكر حسابات هذه المسئلة مع مسائل اخرى
تشبهها فتقول

المسئلة الاولى ماهى الزاوية التى لوغار يتم جيبها $9,056760$
حلها

$$\text{لو جاسه} = 9,056760$$

$$\text{مقابل } 9,0566218 \text{ (فاضله } 1836) = 30^\circ 32'$$

$$\text{الفاضل الاول الذى هو } 1432 = 0000$$

$$\text{الفاضل الثانى اى } 1468 = 0000$$

$$\text{فيكون سه} = 37,8^\circ 32'$$

المسئلة الثانية ماهى الزاوية التى لوغار يتم جيب تمامها $9,056760$
حلها

$$\text{لوجت سه} = 9,056760$$

$$\text{مقابل } 9,0568054 \text{ (فاضله } 1836) = 2^\circ 27' 18''$$

$$\text{الفاضل الاول اى } 4040 = 00000000$$

$$\text{الفاضل الثانى اى } 3680 = 00000000$$

$$\text{فيكون سه} = 22,2^\circ 27' 18''$$

واحدة كما هو مبين فيما نذكره رامزين الى التمام العددى للونغا ريمات بكلمة
لوفنقول

$$\text{لو } ٣١٤ \dots\dots\dots = ٥ \text{ ٩٦٩٢٩٦ ٢,٤}$$

$$\text{لو } ٤١١ \dots\dots\dots = ٨ \text{ ٧,٣٨٦١٥٨١}$$

$$\text{لو جا } ٣٠^\circ \dots\dots\dots = ٩,٦٩٨٩٧٠٠$$

$$\text{لو جت } ١٥^\circ \dots\dots\dots = ٠,٣٠١١٢٤$$

$$\text{فيكون لوجاسه } \dots\dots\dots = ٩,٦١٢١٧٠٢$$

وهذا اللوغاريتم مرتب في الجداول بسهولة كما ينبغي فانه يشاهد هناك
سه = ٧ ١٠ ٢٤

في النسبة التي بين اضلاع مثلث
مستقيم الاضلاع وزواياه

(٦٢)

للاختصار نشير فيما يأتي الى زوايا المثلثات بحروف α و β و γ وه الموضوعه
في رؤوسها وللاضلاع المقابلة لتلك الزوايا بحروف a و b و c وه وزياده
على ذلك اذا كان المثلث قائم الزاوية فوضع γ في رأس الزاوية القائمة ويرمز
للضلع المقابل لها اي الوتر بحرف γ اذا تقرر هذا نبين على التواعد المعتمد
عليها في حل المثلثات المستقيمة الاضلاع فنقول

(٦٣)

الدعوى الاولى النظرية

كل ضلع مجاور للزاوية القائمة في اي مثلث قائم الزاوية يساوي الوتر مضروباً
في جيب الزاوية المقابلة لذلك الضلع

وانفرض كما في شكل (١٣) ان مثلث γ ده قائم الزاوية في نقطة γ
ومن نقطة γ المنعرجة مركزاً يرسم قوس γ وينصف قطرها وينزل عمود
 γ فجيب زاوية γ هو النسبة بين γ وبين نصف قطر γ كما سبق
في بند (١٨) وحيث ان مثلثي γ ده و γ ده متشابهان يوجد فيهما

$$\frac{د ه}{د ه} = \frac{و ح}{د} \text{ فيكون } \frac{د}{د} = ج ا \text{ و } \frac{د}{د} = ح ج ا (١)$$

وبهذا يثبت المطلوب

وحيث ان زاوية د تمام زاوية ه يكون ج ا = ج ت ه ومن هذا يمكن ان يستنتج ان كل ضلع مجاور للزاوية القائمة يساوي الوتر مضروباً في تمام جيب الزاوية المجاورة لذلك الضلع

(٦٤)

الدعوى الثانية النظرية

كل ضلع من الاضلاع المجاورة للزاوية القائمة في اى مثلث قائم الزاوية مساو للضلع الاخر مضروباً في ظل الزاوية المقابلة لذلك الضلع

ولنفرض ايضا مثلث د ه د كما في شكل (١٣) فبعد ان نرسم قوس و د نقيم س ر عموداً على د ه فالنسبة بين س ر و د ه هي ظل زاوية

$$د كما في بند (١٨) وحيث ان \frac{د ه}{د} = \frac{س ر}{د ه} \text{ يكون}$$

$$\frac{د}{د} = \frac{ظا د}{د} \text{ او } د = ه \times ظا د (٢)$$

وهذا الحاصل يمكن ان يستنتج من الدعوى الاولى لانه اذا طبقت هذه الدعوى

على كل من الضلعين د و ه ولوحظ ان ج ا ه = ج ت د يحدث

$$د = ج ا د \text{ و } ه = ح ج ت د \text{ فيكون}$$

$$\frac{د}{ه} = \frac{ج ا د}{ح ج ت د} = \frac{ج ا}{ح ج ت} \text{ او } د = ه \times ظا د$$

الدعوى الثالثة النظرية

نسبة جيبوب الزوايا الى بعضها في اى مثلث مستقيم الاضلاع كنسبة الاضلاع المقابلة لها

ولنفرض ان $\angle د و$ زاويتان حيث ما اتفق من مثلث $د د ه$ كما في شكل (١٤) وتنزل من رأس زاوية $ه$ العمود $ه و$ على الضلع المقابل لها $د د$ فاذا وقع العمود داخل مثلث $د د ه$ فالمثلثان القائم الزاوية $د د ه و$ $د د ه و$ يحدث عنهما $ه و = د ج ا و$ $ه و = د ج ا د$ فيثبت يكون $د ج ا د = د ج ا و$ او $ج ا د : ح ا د :: د : و$ واذا وقع ذلك العمود على استقامة $د د$ كما في شكل (١٥) فثالث $د د ه و$ يحدث منه $ه و = د ج ا د و$ لكن حيث كانت زاوية $د د ه و$ متممة لزاوية $د د ه و$ يحدث كما في بند (٩)

$$ج ا د د و = ج ا د د ه = ج ا د$$

ومن ذلك يحدث ايضا

$$ج ا د : ج ا د :: د : و \quad (٣)$$

(٦٦)

الدعوى الرابعة النظرية

مربع احد الاضلاع في اى مثلث مستقيم الاضلاع يساوى مجموع مربعي الضلعين الاخرين ناقصا ضعف حاصل ضرب مستطيل هذين الضلعين في تمام جيب الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين اعني

$$د^2 = د^2 + ه^2 - ٢ د ه ج د \quad (٤)$$

ولنفرض ان $د د ه$ كما في شكل (١٤) المثلث المذكور ثم تنزل عمود $ه و$ على $د د$ فاذا كانت زاوية $د د ه و$ حادة حدث بمقتضى دعوى معلومة ان

$$ه د^2 = د ه^2 + و د^2 - ٢ د ه و د$$

او

$$د^2 = د^2 + ه^2 - ٢ د ه و د$$

وحيث ان المثلث القائم الزاوية $د د ه و$ يحدث عنه $د و = د ج د$

كما في بند (٦٣) توجد بوضع مقدار ضلع $د و$ بدله معادلة (٤)

واما اذا كانت زاوية $د د ه و$ منفرجة كما في شكل (١٥) فيحدث

$$د^2 = د^2 + ه^2 + ٢ د ه و د$$

والمثلث اقسام الزاوية \angle هو يحدث عنه $\angle = \angle$ جت \angle هو
 لكن زاوية \angle هو متممة لزاوية \angle او \angle فيحدث
 جت $\angle = \angle$ جت \angle كما سبق في بند (٩) فحينئذ يكون
 $\angle = \angle$ جت \angle وبوضع هذا المقدار في مقدار \angle توجد معادلة (٤)
 (٦٧)

النظرية السابقة تكفي وحدها في حل المثلثات المستقيمة الاضلاع لما هو
 ظاهر من ان هذه الدعوى اذا جريت بالتوالي على الاضلاع الثلاثة توجد
 هذه المعادلات الثلاث

$$\begin{aligned} \angle &= \angle + \angle - \angle \text{ جت } \angle \\ \angle &= \angle + \angle - \angle \text{ جت } \angle \\ \angle &= \angle + \angle - \angle \text{ جت } \angle \end{aligned}$$

وبواسطة هذه المعادلات الثلاث يمكن تعيين ثلاثة من اجزاء المثلث الستة
 اذا كانت الثلاثة الاخرى معلومة (الا في الحالة التي لا يمكن فيها حل المثلث وذلك
 اذا علمت الزوايا الثلاث فقط)

(٦٨)

حيث ان النظرية الثالثة تدل على النسبة بين ضلعين وزاويتين مقابلتين لهما
 يجب ان تكون ناتجة عن هذه المعادلات الثلاث ولنذكر كيفية استنتاجها
 منها فنقول

$$\text{المعادلة الاولى يحدث منها جت } \angle = \frac{\angle + \angle - \angle}{\angle} \text{ فيكون}$$

$$\text{جا } \angle = 1 - \text{جت } \angle = \frac{\angle - (\angle + \angle - \angle)}{\angle} = \frac{\angle - \angle - \angle + \angle}{\angle}$$

$$= \frac{\angle + \angle - \angle + \angle - \angle - \angle + \angle}{\angle} \text{ فبالضرورة يحدث}$$

$$\text{جا } \angle = \frac{\angle + \angle - \angle + \angle - \angle - \angle + \angle}{\angle}$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ الذي يؤخذ منه } \gamma = \frac{\alpha \delta}{\beta}$$

ويستنتج ايضا من الدعوى الثانية النظرية مقدار γ بواسطة معادلة
 $\gamma = \frac{\alpha \delta}{\beta}$ أو $\gamma = \frac{\alpha \delta}{\beta}$

(٧١)

الحالة الثالثة

اذا فرضنا ان وتر γ وضاع α معلومان والمطلوب ايجاد ضلع γ
 وزاويتي α و β

قلنا بواسطة خاصية المثلث القائم الزاوية نجد $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$
 التي منها يستخرج $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$
 وهذا المقدار يسهل حسابه بواسطة اللوغاريتمات

ويمكن ايجاد γ بواسطة معادلة $\gamma = \frac{\alpha \delta}{\beta}$ جاء السابقة في بند (٦٣) ومن

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

وبالجملة ينتج $\gamma = 90^\circ$

واذا ابتداء بايجاد الزوايا α و β يمكن ايجاد ضلع γ بواسطة معادلة
 $\gamma = \frac{\alpha \delta}{\beta}$

(٧٢)

الحالة الرابعة

اذا كان ضلعا α و β المجاوران للزاوية القائمة معلومين والمطلوب ايجاد
 الوتر γ والزاويتي α و β

قلنا نحسب اولاً زاوية γ بواسطة معادلة $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ كما في النظرية
 الثانية ومعالم ان $\gamma = 90^\circ$ فوتر γ يوجد بواسطة معادلة

$\gamma = \frac{\alpha \delta}{\beta}$ كما في الدعوى الاولى النظرية

ويمكن ايجاد γ بواسطة قانون $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

لكن حيث ان كمية $\alpha + \beta$ لا تنحل الى مضروبين تكون صعوبة الحسابات اللوغاريتمية فالاحسن ان نعين زاوية γ اولاً ثم نستفاد بها على ايجاد δ

في حل المثلثات المستقيمة الاضلاع ايأما كانت

(٧٣)

الحالة الاولى

اذا كان ضلع δ وزاويتان من مثلث معلومة والمطلوب ايجاد الاجزاء الاخرى

قلنا اذا طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من 180° تعرف الزاوية الثالثة ثم يشرع في ايجاد الضلعين المجهولين α و β بواسطة النظرية الثالثة بوضع هاتين المتناسبتين

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta \quad \text{و} \quad \beta : \alpha :: \delta : \gamma$$

(٧٤)

الحالة الثانية

اذا فرضنا ان ضلعي α و β وزاوية γ المقابلة لاحدهما معلومة والمطلوب ايجاد الضلع الثالث δ والزاويتان الاخرى α و β قلنا الاسهل ان يبحث اولاً عن زاوية δ المقابلة لضلع γ بوضع هذه المتناسبة

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$

ومن حيث ان زاويتي α و β معلومتان يكون

$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

حينئذ يوجد ضلع δ بوضع هذه المتناسبة

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$

(٧٥)

ويلزم لحل هذا السؤال بعض توضيحات زائدة وهي ان نقول المتناسبة الاولى

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{يعني} \quad \alpha \delta = \beta \gamma$$

ومن الجدول يعرف ان زاوية δ زاوية حادة لكن الجيب المذكور يقابل
ايضا الزاوية المتممة المنفرجة فينتد اذا كان m الزاوية الموجودة في الجدول
يكون لزاوية δ مقداران $\delta = m$ و $\delta = 180^\circ - m$

وهذا كما يظهر يدل على مثلثين وينتج عنه تنبيهات

الاول اذا كانت زاوية δ المعلومة منفرجة او قائمة كما في شكل (١٦)
فالزاويتان الاخرى ان تكونان حادثين فيلزم اخذ $\delta = m$ ويلزم فرض $\delta < 90^\circ$
ليكون المثلث ممكنا وهذا الشرط كاف في ذلك

الثاني اذا كانت زاوية δ حادة و $\delta < 90^\circ$ كما في شكل (١٧) يلزم
ان يكون $\delta < 90^\circ$ ويلزم قطع النظر عن كون مقدار $\delta = 180^\circ - m$
فلم يرل المثلث ممكنا

الثالث اذا كانت زاوية δ حادة و $\delta > 90^\circ$ يصح فرض $\delta = m$ و
 $\delta = 180^\circ - m$ على حدسوا كما في شكل (١٨) لان الزاوية الحادة اما
 $\delta = 90^\circ$ او $\delta < 90^\circ$ فالدائرة المرسومة من نقطة h المعتبرة مركزا
بنصف قطر δ يمكن ان تقسم في بعض الاحوال δ في نقطتي
 δ و δ

وحينئذ يحدث معنا مثلثان $\delta h \delta$ و $\delta h \delta$ مرسومين بواسطة المعاليم
وفيهما زاويتان $\delta h \delta$ و $\delta h \delta$ متتامان لبعضهما وشرط ايجاد حلين
ان يكون ضلع δ المفروض $\delta > \delta$ اكبر من عمود h و النازل
على δ واذا كان ضلع δ مساويا h فالدائرة المرسومة من نقطة
 h تكون مماسة لضلع δ والحلان يرجعان لحل واحد المثلث $\delta h \delta$
القائم الزاوية وغاية الامر انه اذا كان ضلع δ اصغر من h لا يمكن حل
المثلث ولنبرهن على ان عدم الامكان في هذه الحالة مبين بمقدار جاء
فثقول

المثلث القائم الزاوية $\delta h \delta$ يحدث عنه $\delta = 90^\circ$ و δ جاء لكن δ بالفرض

اقل من هو فيكون

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} \text{ ومنه يؤخذ } 1 < \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}}$$

فيكون مقدار جاد اكبر منه اومن المعلوم انه لاجيب اكبر من ١ فالمثلث يكون مستحيلا

(٧٦)

قد حكمنا بالبحث على ضلع هـ بعدمعرفة زاوية د ومع ذلك يمكن ايجاد هذا الضلع حالا بواسطة الاجزاء الثلاثة المعلوملة التي هي د و هـ و ح لان الدعوى الرابعة النظرية تفيد

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} + \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} - \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} \text{ ومنها يحدث}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} - \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}}$$

ومن هذه المعادلة التي بدرجة ثانية يستخرج

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} + \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} - \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}}$$

وحيث ان ضلع المثلث لا بد وان يكون كمية حقيقية موجبة يلزم البحث على النسبة التي بين د و هـ و ح التي يحددها الضلع هـ مقدار اومقدار لن من هذا الجنس وقد رأينا انه لا ينبغي الاشتغال بالمباحنة في هذا المقام

وحيث ان مقادير ضلع هـ السابقة غير صحيحة في الحسابات اللوغاريتمية لا تستعمل في حساب المثلثات ولما كان يوجد كثير من امثال هذه المقادير في حساب المثلثات لزمنا ان نبين الطريقة التي انتخبها الفلكيون لتسهيل استعمالها فنضع المقادير السابقة بهذه الكيفية

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} + \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}} - \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ جاد}}$$

وحيث فرضت هذه المقادير حقيقية تكون كمية اصغر من ١ ويمكن

اعتبار هذه الكمية جميعا لاحدى الزوايا كزاوية ع التي نعين بوضع

$$\text{جاء} = \frac{\text{جاء} \text{ فينتيحدث}}{\text{جاء}}$$

$$\frac{\text{جاء}}{\text{جاء}} = \frac{\text{جاء} - 1}{\text{جاء}} \quad \text{جاء} = \frac{\text{جاء}}{\text{جاء}}$$

$$\text{فيكون هـ} = \frac{\text{جاء جت د} \pm \text{جاء جت ع}}{\text{جاء}} = \frac{\text{جاء (ع} \pm \text{د)}}{\text{جاء}}$$

وهذه المقادير سهلة الحسابات بواسطة اللوغاريتمات
وبالجملة فم هذا الحل داخل في الحقيقة تحت الاول لان زاوية ع المساعدة هي
عبارة عن زاوية د

الحالة الثالثة

(٧٧)

اذا كان ضلعا د و هـ والزاوية التي بينهما من مثلث معلوم والمطلوب إيجاد
ضلع هـ وزاويتا د و هـ
قلنا يعلم من الدعوى الثالثة النظرية ان
د : هـ :: ج : ج

وهذه المتناسبة تحتوى على مجهولى د و هـ لكن يحدث منها

$$\text{د} + \text{هـ} : \text{د} - \text{هـ} :: \text{ج} + \text{ج} : \text{ج} - \text{ج}$$

ومن المعلوم ايضا كما في بند (٤٠) ان

$$\text{ج} + \text{ج} : \text{ج} - \text{ج} :: \frac{1}{\text{ط}} (د + \text{ج}) : \frac{1}{\text{ط}} (د - \text{ج})$$

فينتج

$$\text{د} + \text{هـ} : \text{د} - \text{هـ} :: \frac{1}{\text{ط}} (د + \text{ج}) : \frac{1}{\text{ط}} (د - \text{ج}) \quad (١)$$

وحيث كان

$$\frac{1}{\text{ط}} (د + \text{ج}) = \frac{1}{\text{ط}} (٨٠ - \text{هـ}) = ٩٠ - \frac{1}{\text{ط}} \text{هـ}$$

تكون الثلاثة حدود الاول من المتناسبة السابقة معلومة ويمكن ان يبنى عليها
معرفة مقدار $\frac{1}{\text{ط}} (د - \text{ج})$ ومتى علم نصف مجموع زاويتي د و هـ ونصف

فاضلهم ما يعلم كل من الزاويتين لان من المعلوم بداهة انه يحدث

$$\frac{s-r}{2} - \frac{s+r}{2} = s \quad \text{و} \quad \frac{s-r}{2} + \frac{s+r}{2} = r$$

وحيث علم r و s يوجد $هـ$ بوضع

$$(2) \quad \text{جار} : \text{جاه} :: \hat{r} : \hat{هـ}$$

(٧٨)

وهذه المناسبة تستلزم البحث عن ثلاثة لوغاريتمات جديدة هي \hat{r} و جار

و جاه لكنها تنقص واحد ابدا طريقة انه حيث حدث

$\text{جار} : \text{جاد} : \text{جاه} :: \hat{r} : \hat{s} : \hat{هـ}$ يلزم ان تحدث ايضا

هذه المناسبة

$\text{جار} + \text{جاد} : \text{جاه} :: \hat{r} + \hat{s} : \hat{هـ}$ وينبني على هذا ان

$$\hat{هـ} = \frac{(\hat{r} + \hat{s}) \text{جاه}}{\text{جار} + \text{جاد}}$$

وبواسطة القوانين المعلومة السابقة في بندى (٣٩ و ٢٩) يعلم

$$\text{جار} + \text{جاد} = 2 \text{ جا} \frac{1}{r} \quad \text{جت} \frac{1}{r} (s-r) \quad \text{و}$$

$$\text{جاه} = 2 \text{ جا} \frac{1}{r} \text{هـ} \quad \text{جت} \frac{1}{r} \text{هـ} \quad \text{وكذلك}$$

$$\text{جا} \frac{1}{r} (s+r) = \text{جا} (90^\circ - \frac{1}{r} \text{هـ}) = \text{جت} \frac{1}{r} \text{هـ} \quad \text{وبوضع هذه المقادير}$$

في مقدار $\hat{هـ}$ والاختصار الكلى يحدث

$$(3) \quad \hat{هـ} = \frac{(\hat{r} + \hat{s}) \text{جا} \frac{1}{r} \text{هـ}}{\text{جت} \frac{1}{r} (s-r)}$$

وهذا القانون المشتمل على $\hat{r} + \hat{s}$ معلوم مما سبق فقد علم حقيقة انه نقص

من اللوغاريتمات المبحوث عنها في متناسبة (٢) واحد

(٧٩)

تعيين ضلع $\hat{هـ}$ لا يتأتى الا بعد تعيين زاويتي r و s ولاجل تعيينه

بدون هذه الوساطة نستعمل الدعوى الرابعة النظرية التي يحدث منها

$$ه = \sqrt{\frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج} - ٢} \text{ جت ه}$$

وحيث ان اللوغاريتمات لا يمكن تطبيقها على هذا القانون يلزمنا ان نستعين
بزائوية مساعدة ونختار الطريقة المشهورة من الطرق الجبراة على هذا القانون
فنقول من المعلوم ان

$$\text{جت } \frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج} = ١ \text{ و جت } \frac{ر}{ج} - \frac{ر}{ج} = \frac{ر}{ج} \text{ جت ه}$$

كافي بند (٣١) وبالوضع يحدث

$$\begin{aligned} ه &= \sqrt{\frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج} - ٢} \text{ جت ه} \\ &= \sqrt{\frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج} - ٢} \text{ جت ه} \\ &= \sqrt{\frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج} - ٢} \text{ جت ه} \\ &= \sqrt{\frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج} - ٢} \text{ جت ه} \end{aligned}$$

وحيث ان الظل يمكن ان يتكيف بجميع كميات الكمية يفرض

$$\frac{\text{ظاع} - \frac{ر}{ج} \text{ ظت } \frac{ر}{ج}}{\frac{ر}{ج} + \frac{ر}{ج}} = \text{ظاع}$$

وحينئذ يصير الجذر الاخير

$$\begin{aligned} \frac{١}{\text{جت ع}} &= \frac{\text{جاع}}{\text{جت ع}} + ١ \\ \frac{١}{\text{جت ع}} &= \frac{\text{جاع}}{\text{جت ع}} + ١ \\ \frac{١}{\text{جت ع}} &= \frac{\text{جاع}}{\text{جت ع}} + ١ \end{aligned}$$

وينتج من ذلك

وهكذا توجد بالتوالي الزاوية المساعدة ع وضع ه بواسطة قانونين
يسهل حسابهما بواسطة الجداول

وهذا الحل لا يخالف الحل السابق الا في الصورة لان $\frac{ر}{ج} (١ + د)$
من حيث انه مساو ظت $\frac{ر}{ج}$ ه يكون مقدار ظاع عين مقدار
 $\frac{ر}{ج} (١ - د)$ الناتج من متناسبة (١) وحينئذ يكون مقدار ه السابق
عين مانج من قانون (٣)

يوجد غالباً في العمليات ان الاضلاع تعلم من لوغاريتماها ولنفرض ان δ و ϵ كذلك وان زاوية h معلومة والمطلوب معرفة زاويتي δ و ϵ وحينئذ لاجل تعيين $\frac{1}{\delta}$ ($\delta - \epsilon$) بواسطة متناسبة (١) يلزم قبل كل شيء ان نبحث عن δ و ϵ في الجداول ويمكن اجتناب هذا البحث باستعمال زاوية مساعدة بان يفرض ان زاوية ϵ الزاوية المعلومه بوضع

ظا $= \frac{\delta}{\epsilon}$ ومن قانون (٢) السابق في بند (٣٤) يحدث

$$\frac{\text{ظا } 1 - \text{ظا } 45^\circ}{\text{ظا } 1 + \text{ظا } 45^\circ} = \frac{\text{ظا } 45^\circ - \text{ظا } \epsilon}{\text{ظا } 45^\circ + \text{ظا } \epsilon}$$

وبوضع مقدار ظا ϵ بدلا عنه يحدث

$$\frac{\delta - \epsilon}{\delta + \epsilon} = (\text{ظا } 45^\circ - \epsilon)$$

ومن متناسبة (١) السابقة يحدث

$$\frac{\delta - \epsilon}{\delta + \epsilon} = (\delta - \epsilon) \frac{\text{ظا } \frac{1}{\delta}}{\text{ظا } \frac{1}{\delta} + \epsilon} \text{ فيكون}$$

$$\frac{\text{ظا } \frac{1}{\delta} (\delta - \epsilon)}{\text{ظا } \frac{1}{\delta} + \epsilon} = \text{ظا } (\text{ظا } 45^\circ - \epsilon)$$

اي انه حيث كان ϵ معلوما يوجد بالسهولة $\frac{1}{\delta}$ ($\delta - \epsilon$) وبهذه الطريقة يتقص لوغاريتما لا يحتاج لحسابهما بخلاف ما لو تعين ضلعا δ و ϵ

(٨١)

الحالة الرابعة

اذا فرض ان الاضلاع الثلاثة δ و ϵ و h معلومة والمطلوب ايجاد

الزوايا الثلاث δ و ϵ و h

قلنا من الدعوى الرابعة النظرية يحدث $\delta' = \epsilon' = \epsilon - \delta$ جت δ ومن ذلك

يستخرج

$$\frac{\delta' + \epsilon' - \epsilon}{\epsilon - \delta} = \text{جت } \delta$$

كالمتقدمة لانه اذا انتبه الى ان $٢ \text{ جت } \frac{١}{٢} = ١ + \text{جت } ٢$ كما سبق في بند (٣١) وابرى على جت ٢ من التحويلات ما جرى على $\text{جا } \frac{١}{٢}$ يوجد

$$\text{جت } \frac{١}{٢} = \sqrt{\frac{٢(٢-٢)}{٢هـ}}$$

فاذا قسم مقدار $\text{جا } \frac{١}{٢}$ على مقدار جت $\frac{١}{٢}$ يوجد هذا القانون

$$\text{ظا } \frac{١}{٢} = \sqrt{\frac{(٢-٢)(٢-٢)}{٢(٢-٢)}}$$

وحيث كان كل من القوانين الثلاثة السابقة يستلزم البحث عن اربع لوغاريتات فلا مرجح لاحدها عما اذا اريد تعيين زاوية واحدة من المثلث اما اذا اريد تعيين زاويتين فالاحسن استعمال القانون الاخير منها لانه يكفي فيه البحث عن لوغاريتات الكميات الاربع التي هي ٢ و $٢-٢$ و ٢ و $٢-٢$ ولواستعمل الانسان الاولان للزم البحث عن ستة لوغاريتات

(٨٣)

من المعلوم انه لا يمكن دائما رسم مثلث بمعرفة ثلاثة اضلاع مفروضة حيث ما اتفق ولنبرهن على ان هذه الاستحالة ناشئة من ذات الحسابات فنفرض اننا نستخدم قانون

$$\text{جا } \frac{١}{٢} = \sqrt{\frac{(٢-٢)(٢-٢)}{٢هـ}}$$

فلو كان رسم المثلث ممكنا لزم ان يكون مقدار $\text{جا } \frac{١}{٢}$ حقيقيا واقل من واحد واذا لم يكن رسمه ممكنا يكون مقدار $\text{جا } \frac{١}{٢}$ اما تخيليا واما اكبر من واحد وشرط عدم الامكان ان يكون كل ضلع اكبر من مجموع الاثنين الاخرين وهالك نتائج تحدث من القانون المعلوم

الاولى اذا فرض ان $٢ < ٢ + ٢هـ$ يحدث

$٢ < ٢ + ٢هـ$ وحينئذ يكون $٢ < ٢هـ$

فعلى هذا يكون $٢ - ٢ > ٢هـ$ ومعلوم بداهة ان $٢ + ٢هـ < ٢هـ$ فيكون

٢ + ٢ + هـ او ٢ < ٢ هـ فيثبت ان م - هـ < ٠ فيكون مقدار جا ١ د تخيليا

الثانية اذا فرض ان هـ < ٢ + ٢ بنج ان م - هـ > ٠ و م - ٢ < ٠ اعني ان مقدار جا ١ د تخيلي ايضا

الثالثة اذا فرض ان ٢ < ٢ + هـ يحدث ٢ + ٢ + هـ او ٢ < ٢ + ٢ هـ فيكون م < ٢ + هـ فيثبت ايضا م - ٢ < هـ و م - هـ < ٢ و (م - ٢) (م - هـ) < هـ ٢ فينتج من ذلك ان مقدار جا ١ د < ١ وذلك غير موافق لاي زاوية كانت

عمليات رقبة

(٨٤)

العمليات الكبرى المساحية تستلزم عدة آلات لا يمكن وصفها هنا غاية ما هنالك نذكر بعض ملحوظات تكن في تفهيم هذه العمليات فنقول لاجل رسم خط مستقيم على الارض تستعمل شواخص ترشق بمبتعدة عن بعضها على خط مستقيم بحيث اذا وقع البصر على اول شاخص منها يتوارى به غيره من بقية الشواخص عن البصر ثم يرسم احدى الزوايا على الورق بواسطة آلة النقل او برق الناقل وهو نصف دائرة منقسم الى درج وهناك عدة آلات تستعمل لقياس الزوايا سواء على الارض او في الفراغ ومن ذلك الجرافوميتر والبوصل ودائرة التكرار الخ وهذه الالات مصنوعة على العموم من دائرة او قطع دائرة عليها نصف قطر مثبت وآخر متحرك على مركزها يوجه الى اى جهة اريدت وكذلك سطح الدائرة يمكن ان يدور حول مركزها متى احتج لمعرفة زاوية بين خطوط مستقيمة مارة من نقطة معلومة الى نقطتين معلومتين ويجب وضع مركز الآلة في النقطة المعلومة ويوجه نصف القطرين نحو النقطتين الاخرين ويقرأ عدد الدرج المنحصر بين نصفي القطرين على المحيط فيكون هذا العدد هو مقدار الزاوية المطلوبة وهنا وان الشروع في العمليات

وليعلم المطلع على هذا الكتاب ان الحسابات جارية على مقتضى الطريقة التي
سبق في بند (٦١)

(٨٥)

العملية الاولى انظر شكل (١٩)

اذا فرضنا في مثلث δ هذه القائم الزاوية في نقطة δ ان

$$\delta = ١٧٨٥,٣٩٥^\circ \text{ و } \delta = ٤٢^\circ ٣٧' ٥٩'' \text{ والمطلوب ايجاد } \delta \text{ و } \delta$$

و δ كما في بند (٦٩) يقال اذا طرحت زاوية δ من ٩٠° يحدث
 $\delta = ٩٠^\circ - ٤٢^\circ ٣٧' ٥٩'' = ٤٧^\circ ١٨' ٣٠''$

فيبقى البحث عن ايجاد ضلعي δ و δ وهما هي طريقة ايجاد كل
منهما

(حساب ضلع δ)	(حساب ضلع δ)
لو ج $\delta = ٩,٩٣٥٨٩١٩ = ٥٩^\circ ٣٧' ٤٢''$	لو ج $\delta = ٩,٩٣٥٨٩١٩ = ٥٩^\circ ٣٧' ٤٢''$
لو $\delta = ٣,٢٥١٧٣٤٣ = ١٧٨٥,٣٩٥$	لو $\delta = ٣,٢٥١٧٣٤٣ = ١٧٨٥,٣٩٥$
لو $\delta = ٣,١٨٧٦٢٦٢ = \dots\dots\dots$	لو $\delta = ٣,١٨٧٦٢٦٢ = \dots\dots\dots$
فيكون $\delta = ٩٠,٢,٧٠٨$	فيكون $\delta = ١٥٤,٠,٣٧٤$

(٨٦)

العملية الثانية شكل (٢٠) م

اذا فرضنا في مثلث δ هذه ان $\delta = ٢٥٩٧,٨٤٥$ و

$$\delta = ٣٠٨٤,٣٢٧^\circ \text{ و } \delta = ٤٧^\circ ١٢' ٥٦'' \text{ والمطلوب ايجاد } \delta \text{ و } \delta$$

و δ كما في بند (٧٤) يوضع هكذا

(حساب زاوية δ): $\delta :: \delta$: جاد : جاد (ولمذا السؤال حلان)

$$\text{لو ج } \delta = ٩,٩١٩٦٥٩٢ = ٥٦^\circ ١٢' ٥٦'' \text{ الاول فيه } \delta = ٨٠,٢٩$$

$$\text{لو } \delta = ٣,٠٨٤,٣٢٧ = ٣,٤٨٩١٦٠٤ = \text{الثاني فيه } \delta = ٩٩,٢٠$$

$$\text{لو } \delta = ٢٥٩٧,٨٤٥ = ٦,٥٨٥٣٨٦٨$$

$$\text{لو ج } \delta = ٩,٩٩٤٢٠٦٤ = \dots\dots\dots$$

فإذا فرض ان $\hat{c} = 9409,31$ و $\hat{s} = 8032,29$ و
 $\hat{h} = 58, 1242$ يحدث $\hat{m} = 20734,18$ و $\hat{m} = 12867,09$
 و $\hat{m} - \hat{s} = 80$ و 4834 و $\hat{m} - \hat{h} = 51$ و 4624
 و $\frac{(\hat{s} - \hat{m})(\hat{h} - \hat{m})}{\hat{h}} = \frac{1}{2}$

حسابات هذا السؤال

لو $(\hat{m} - \hat{s})$	$= 3, 6843780$
لو $(\hat{h} - \hat{m})$	$= 3, 6600607$
لو \hat{s}	$= 6, 0901606$
لو \hat{h}	$= 6, 0839368$
لو $\frac{1}{2}$	$= 19, 0280416$
لو $\frac{1}{2}$	$= 9, 7642708$
$\frac{1}{2} = 30 \quad 31 \quad 47$	
فيكون $\frac{1}{2} = 34 \quad 3 \quad 71$	

(٨٨)

العملية الرابعة شكل (٢١)

إذا كان المطلوب إيجاد ارتفاع \hat{c} لعمارة يمكن الوصول إلى أسفلها بقاس
 على أرض مستوية قاعدة \hat{h} من ابتداء الأسفل ولاجل احتساب الزوايا
 الصغرى يلزم أن تكون هذه القاعدة لا صغيرة جدا ولا كبيرة كذلك بالنسبة
 لارتفاع \hat{c} ثم نوضع في نقطة \hat{h} أرجل الآلة التي تقاس بها زاوية \hat{s} و
 الحادثة من \hat{s} مع الخط الأفقي \hat{m} الموازي لخط \hat{h}
 وحيث كان ضلع \hat{m} وزاوية \hat{s} في مثلث \hat{h} القائم الزاوية
 معلومين يمكن حساب \hat{c} كما في بند (٧٠) وجميع \hat{h} إلى \hat{c}
 بعرف الارتفاع المطلوب الذي هو \hat{c}

ولنفرض ان هـ = ١٠ ر أ و ف = ٢٨ ر أ و

ع = ٢٥ ٣١ ٤١ فيحدث

ح ف = ٦١,٢٨ × ظا ٢٥ ٣١ ٤١

لو ظا ٢٥ ٣١ ٤١ = ٩,٩٤٧١٦٩٠

لو ٦١,٢٨ = ٠٠٠٠٠٠٠ ٦١,٢٨

لو ح ف = ١,٧٣٤٤٨٧٨ =

فيكون ح ف = ٤,٢٦١ ٥ ٥٠,٣٦١ = ح د

اما اذا كان اسفل العمارة غير يمكن الوصول اليه او كان ح د ارتفاع تل مرتفع عن الارض المجاورة له كما في شكل (٢٢) فان موقع ذلك الارتفاع يكون مجهولا ولا يمكن قياس بعد هـ لكن يمكن قياس زاوية ح د ف لانه يمكن بدون ايجاد خط ح د جعل سطح الدائرة الذي تقاس به الزوايا يمر بالخط الراسي الذي هو ح د وايضا يمكن تعيين بعد ح د كما ذكره في العملية الآتية فيعلم من ذلك وتر ح د وزاوية ح د وحينئذ يمكن ايجاد مسافة ح ف كما في بند (٦٩)

(٨٩)

العملية الخامسة (شكل ٢٣)

اذا كان المطلوب ايجاد البعد الكائن بين نقطة ح المعلومه التي هي محل الوقوف ونقطة هـ البعيدة عنها ولم يمكن الوصول اليها تقاس اولا قاعدة ح د ثم زاوية هـ د و زاوية ح د وحينئذ يمكن تعيين بعد ح د كما في بند (٧٣)

ولنفرض ان المعاليم ح د = ٢٤٧,٤٩ و ح د = ٤١ ٦٢ ٥ = د و ٤٢ ٥٩ فن ذلك يحدث هـ = ٣٧ ٥٧ ويمكن حساب بعد ح د كما تراه هنا هكذا

جاء : جاد :: دد : ده

$$\text{لو دد} = ٢,٣٩٣٥٥٧٧$$

$$\text{لو جاد} = ٩,٩٣٦٢٠٩٨$$

$$\text{لو جاه} = ٠,٠٧٣٤٠٨٧$$

$$\text{لو ده} = ٢,٤٠٣١٧٦٢ \quad \text{فيكون البعد المطلوب}$$

$$\text{هه} = ٢٥٣,٠٣٢$$

(٩٠)

العملية السادسة شكل (٢٤)

إذا كان المطلوب إيجاد بعد هو الكائن بين محلين لا يمكن الوصول إليهما لكنهما ممرين

تقاس قاعدة دد والزوايا التي هي ددو و ددهو ددو و دده
ثم يعين ضلع دد من مثلث ددو بالطريقة التي سبقت ومن مثلث دده
ضلع دد ومن حيث أن زاوية دده معلومة بسبب أن النقط الأربع
د و د و ه و و في سطح مستو نجد دده = ددو - دده
وعلى كل حال يمكن إيجاد هذه الزاوية بقياسها بدون عائق وبهذا نكون
قد علمنا من مثلث دده ضلعين والزاوية التي بينهما فيسهل إيجاد ضلع هو
كما في بند (٧٧)

م

$$\text{ولنفرض أن المعاليم} \quad \text{دد} = ٣٤٥,٢٩ \quad \text{ددو} = ٢٦ \quad \text{و} \quad ٦٩^\circ$$

$$\text{دده} = ٣١ \quad ٤٤^\circ \quad \text{و} \quad \text{دده} = ٢٥ \quad ٤١^\circ \quad \text{و} \quad \text{ددو} = ١٥ \quad ٤٨^\circ \quad \text{و}$$

$$\text{دده} = ١٤ \quad ١٠٢^\circ$$

$$\text{فن ذلك ينتج حالا مقداران ددو} = ١٩ \quad ٦٢^\circ$$

$$\text{دده} = ١٥ \quad ٣٣^\circ \quad \text{ثم تعمل الحسابات هكذا}$$

(الاول حساب ضلع د)و

جا دد : جادد :: د : دد

$$\text{لو} = د = ٢,٥٣٨١٨٤٠$$

$$\text{لو جادد} = ٩,٨٧٢٧٧٢٢$$

$$\text{لو جادد} = ٠,٠٥٢٧٩٧٣$$

$$\text{لو} = د = ٢,٤٦٣٧٥٣٥$$

$$\text{فيكون د} = ٢٩٠,٩٠٧$$

(الثاني حساب ضاع د هـ)

جاد هـ : جاد هـ :: د : د هـ

$$\text{لو} = د = ٢,٥٣٨١٨٤٠$$

$$\text{لو جاد هـ} = ٩,٩٩٠٠٢٤٧$$

$$\text{لو جاد هـ} = ٠,٢٦٠٩٨٧١$$

$$\text{لو} = د هـ = ٢,٧٨٩١٩٥٨$$

فيكون

$$\text{د هـ} = ٦١٥,٤٥٤$$

(الثالث حساب زاويتي و هـ)

اذا فرضنا ان د هـ = د و د و د هـ = د هـ و د هـ = د و يوجد

$$\text{و} + \text{هـ} = ٩٠٦,٣٦١ \text{ و } \text{و} - \text{هـ} = ٣٢٤,٥٤٧$$

$$\frac{1}{2}(\text{و} + \text{هـ}) = ٣٠٠^\circ ٩' ٧٧'' \text{ ثم يوضع}$$

$$\text{و} + \text{هـ} : \text{و} - \text{هـ} :: \text{ظا} \frac{1}{2}(\text{و} + \text{هـ}) : \text{ظا} \frac{1}{2}(\text{و} - \text{هـ})$$

$$\text{لو ظا} \frac{1}{2}(\text{و} + \text{هـ}) = ١٠,٦٤٢١٤٢٧$$

$$\text{لو} (\text{و} - \text{هـ}) = ٢,٥١١٢٧٧٦$$

$$\text{لو} (\text{و} + \text{هـ}) = ٧,٠٤٢٦٩٨٨$$

$$\text{لو ظا} \frac{1}{2}(\text{و} - \text{هـ}) = ١٠,١٩٦١١٩١$$

$$\text{فيكون} \frac{1}{2}(\text{و} - \text{هـ}) = ٦^\circ ٣١' ٥٧'' \text{ فينتج من ذلك}$$

$$\text{و} = ٣٦^\circ ٤٠' ١٣٤'' \text{ و هـ} = ٢٤^\circ ٣٨' ١٩''$$

(الرابع حساب ضلع وه)

جاه : جا وه :: و : وه

لو ه = ٢,٤٦٣٧٥٣٥

لو جا وه = ٩,٦٣٦٨٨٥٩

لو جا ه = ٠,٤٧٣٥١٩٦

لو وه = ٢,٥٧٤١٥٩٠

فيكون وه = ٣٧٥,١١٠

(٩١)

ولهذا السؤال حل آخر نذكره فنقول قد علم انه لا يمكن تعيين بعدى ح و وه
 الا بواسطة لو غاريتميهما والفرض الان تعيين ذلك باستعمال زاوية ع
 المساعدة التي تكملنا عليها في بند (٨٠) فتبحث بعد ايجاد لو ح و

لو وه عن زاويتي و ه هكذا

(حساب زاوية ع) (حساب زاويتي و و ه)

ظا ع = $\frac{و}{ه}$	ظا $\frac{1}{2}$ (و-ه) = ظا $\frac{1}{2}$ (ه+و) ظا ٤٥ - ع
----------------------	---

لو ح و = ٢,٤٦٣٧٥٣٥	لو ظا $\frac{1}{2}$ (و+ه) = ١٠,٦٤٢١٤٢٧
--------------------	--

لو ح ه = ٧,٢١٠٩٠٤٢	لو ظا (٤٥ - ع) = ٩,٥٥٣٩٧٩٠
--------------------	----------------------------

لو ظا ع = ٩,٦٧٤٥٥٧٧	لو ظا $\frac{1}{2}$ (و-ه) = ١٠,١٩٦١٢١٧
---------------------	--

ع = ٥٥ ١٧ ٢٥	فيكون $\frac{1}{2}$ (و-ه) = ٥٧ ٣١ ٦
--------------	-------------------------------------

فيكون ٤٥ - ع = ١٩ ٤٢ ٥	وعلى ذلك تقس بقية الحسابات
------------------------	----------------------------

(٩٢)

العملية السابعة

اذا فرضنا ان ثلاث نقط ح و د و ه على ارض مستوية معلومة
 والمطلوب ايجاد نقطة م التي يرى منها بعدا ح و ه في زوايا معلومة

يقال

الطريقة التي يبحث فيها اولاً عن زاويتي $د م$ و $د ه$
 وذلك ان نفرض المعاليم $د = د$ و $د ه = د و$ و $د د ه$
 $د م ه = ع$

والمجاهيل $د م = س$ و $د ه م = ص$
 ثم نقول ان ذالاً اربعة اضلاع $د م ه$ يحدث منه

$$س + ص = ٣٦٠ - (ع + ع + د)$$

ومن ذلك يعلم مجموع زاويتي $س$ و $ص$ ولنبحث الا
 فنقول مثلاً $د م$ و $د ه م$ يحدث

$$\left(\begin{array}{l} \text{ظا ع : جاسه} \\ \text{جا ع : جاصه} \end{array} \right) \begin{array}{l} :: \\ :: \end{array} \begin{array}{l} د : د \\ د م : د م \end{array}$$

وبالتسوية بين مقدارى $د م$ يحدث

$$\frac{د جاسه}{جاسه} = \frac{جا ع}{جاصه} \quad \text{او} \quad \frac{د جاع}{جاصه} = \frac{جاسه}{جاصه}$$

وانضع $ط = د جاع$ وكتبه $ط$ يسهل تعيينها بواسطة الل

يحدث

$$\frac{د}{ط} = \frac{جاسه}{جاصه} \quad \text{ومنها}$$

$$\text{يؤخذ} \quad \frac{د + ط}{د - ط} = \frac{جاسه + جاصه}{جاسه - جاصه}$$

وبذلك يثبت كما في بند (٤٠) ان

$$\frac{د + ط}{د - ط} = \frac{ظا ا (س + ص)}{ظا ا (س - ص)}$$

وحيث ان مجموع $س + ص$ معلوم فالفاضل الذي
 يكون معلوماً ايضا بواسطة هذه المعادلة الاخيرة و

س و صه بسهولة وحينئذ تكون زاوية $\angle م = 180^\circ - (\angle س + \angle هـ)$
 ويعلم ايضا $\angle م$ من احد متناسبات (١)

الباب الثالث
 في بيان المثلثات الكروية
 في النسب الواقعة بين زوايا مثلث
 كروي وبين اضلاعه
 قانون اصلي

(٩٣)

اجزاء المثلث الكروي المرسوم على كرة معلومة تتعين بمعرفة عدد الدرج المشتمل
 عليها كل واحد من تلك الاجزاء فكل مسائل المثلثات الكروية متوقفة على
 الارتباطات التي بين عدد هذا الدرج اعني بين الاعداد المثلثية المقابلة لها من
 حيث الجيب وجيب التمام الخ فلذلك يجب اولاً ان نبحث عن القانون الرابط
 لاحد الزوايا بالثلاثة الاضلاع ثم نبين كيفية استنتاج حل جميع الاحوال التي
 يمكن ان تطرأ على مسائل المثلثات الكروية من ذلك فنقول نرصد آتياً
 الى زوايا المثلث بحروف $\angle د و هـ$ وللاضلاع المقابلة لها بحروف
 $\angle و هـ و هـ$

ثم نفرض كما في شكل (٢٦) ان $\angle و$ مركز الكرة المرسوم عليها مثلث
 $\angle د هـ$ ونرسم انصاف اقطار $\angle د و و هـ$ ونقيم على $\angle د$
 عمودين $\angle د و و هـ$ احدهما في مستوى $\angle د و هـ$ والاخر في مستوى
 $\angle د هـ و هـ$ ونفرض انهما يقابلان نصفي قطري $\angle د و و هـ$ اذا ما في نقطتي
 $\angle د و هـ$ فتكون زاوية $\angle د و هـ$ مساوية لزاوية $\angle د و هـ$ من المثلث الكروي
 فاذا جعل $\angle د و هـ$ واحداً يحدث

$\angle د و هـ = \angle د و هـ = \angle د و هـ$
 اذا علمت هذا يحدث من مثلي .

روح و روح كما سبق في بند (٦٦) معادلتا

$$ور' + ر' - ٢ور \times ر = ر' = ر$$

و

$$ور' + ر' - ٢ور \times ر = ر' = ر$$

فاذا طرحت المعادلة الاولى من الثانية ونبه على ان $ور' - ر' = ر$ -

$ر' = ١$ ووضع بدل تلك الخطوط اسمائها المثلثية وقسم باقي الطرح على ٢

يوجد

$$١ - قائم فاه جت ر + ظاء فاه جت ر = ٠$$

$$\text{لكن حيث ان قائم} = \frac{١}{جت ر} \text{ و } \text{ظاء} = \frac{\text{جاء}}{جت ر} \text{ وقاه} = \frac{١}{جت ه}$$

يكون

$$١ - \frac{جت ر}{جت ر ه} + \frac{\text{جاء فاه جت ر}}{جت ر ه} = ٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$جت ر = جت ر ه + جاء فاه جت ر (١)$$

وهذا هو قانون حساب المثلثات الكروية الاصل

(٩٤)

ضلعاً ر و ه في الشكل اقل من ٩٠° لكن يسهل ان يشاهد ان

قانون واحد عام ولا ثبات ذلك نفرض ان احدا الضلع كضلع ر و ه

اكبر من ٩٠° كما في شكل (٢٧) ونعند نصفي محيط ه ر ه و ه و ه

حتى يتلاقيا في نقطة ه فيحدث مثلث ر ه الذي ضلعا ر و د

او د ه و ه متماثل ضاعى ر و د

وزاوية ر ه متماثلة زاوية د ومن حيث ان ضاعى د و ه اقل

من ٩٠° ~~يكن~~ نطبق قانون (١) على مثلث ر ه وينتج منه

$$جت ر = جت ر ه + جاء فاه جت ر ه$$

لكن $١٨٠^\circ - ر = د$ و $١٨٠^\circ - ر و ه = ه$ - فاذا وضعت

هذه المقادير وغيرت اشارات الطرفين حدث قانون (١) بعينه فيثبت يكون

الثانية النسبة الواقعة بين ضلعين وزاويتين مقابلتين لهما من الضلعين
 لاجل ايجاد النسبة الواقعة لمرتبة $\hat{د}$ و $\hat{و}$ و $\hat{ز}$ و $\hat{د}$ يلزم ان تحذف
 كمية $\hat{هـ}$ من معادلتى (١) و (٢) والطريقة المستقيمة في ذلك
 ان يستخرج مقدار $\hat{جاء}$ و $\hat{جت هـ}$ ثم يوضعان في معادلة
 $\hat{جاء} + \hat{جت هـ} = ١$

ولنستعمل حسابا آخر كالسابق في بند (٦٨) فنقول معادلة (١)
 يحدث منها

$$\hat{جت د} - \hat{جت ز جت هـ} = \hat{جت د} - \hat{جاء} \quad \text{وحيث نزيد}$$

$$\hat{جاء} = ١ - \hat{جت د} = ١ - (\hat{جت د} - \hat{جت ز جت هـ}) = \hat{جاء} + \hat{جت ز جت هـ}$$

$$= \frac{(١ - \hat{جت ز})(١ - \hat{جت هـ}) - (\hat{جت د} - \hat{جت ز جت هـ})}{\hat{جاء} + \hat{جت ز جت هـ}}$$

$$= \frac{١ - \hat{جت د} - \hat{جت ز} + \hat{جت ز جت هـ} + \hat{جاء} + \hat{جت ز جت هـ}}{\hat{جاء} + \hat{جت ز جت هـ}}$$

وينتج من ذلك

$$\frac{\hat{جاء}}{\hat{جاء}} = \frac{١ - \hat{جت د} - \hat{جت ز} + \hat{جت ز جت هـ} + \hat{جاء} + \hat{جت ز جت هـ}}{\hat{جاء} + \hat{جت ز جت هـ}}$$

ولا اشكال هنا في اشارة الجذر بناء على ان الزوايا والاضلاع كانت اقل من
 ١٨٠ ° فجيوبها تكون موجبة ومن حيث ان الطرف الثانى لا يزال ثابتا
 ولو تغير $\hat{د}$ و $\hat{ز}$ الى $\hat{د}$ و $\hat{ز}$ وبالعكس اولى $\hat{هـ}$ و $\hat{هـ}$ وبالعكس

$$\text{يستنتج} \quad \frac{\hat{جاء}}{\hat{جاء}} = \frac{\hat{جاء}}{\hat{جاء}} = \frac{\hat{جاء}}{\hat{جاء}} \quad (٤)$$

فثبت ان نسبة جيوب الزوايا الى بعضها في كل مثلث كروى كنسبة جيوب
 الاضلاع المقابلة الى بعضها

(٩٨)

الثالثة النسبة الواقعة بين ضلعين وزاوية بين احدهما بين هذين الضلعين
والاخرى مقابلة لاحدهما

ولايجاد هذه النسبة تعتبر مرتبة $\text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$ ويحذف اولا
جت هـ من معادلة (١) و (٣) ليحصل جت د = جت ز جت ا
+ جت و جت جت هـ + جت و جت هـ جت و

فاذا حول جت ز جت ا الى الطرف الاول ونبه على ان جت د - جت و
جت ا = جت و جت و جت ا وقسم كل من الطرفين على جت و جت ا فنج

$$\frac{\text{جت ز جت ا}}{\text{جت و جت ا}} = \frac{\text{جت و جت هـ} + \frac{\text{جاه جت و}}{\text{جاء}}}{\text{جاء}} \quad \text{لكن من حيث ان}$$

$$\frac{\text{جاه}}{\text{جاء}} = \frac{\text{جاه}}{\text{جاء}} \quad \text{تكون النسبة المطلوبة هكذا}$$

$$\text{ظت ز جت و} = \text{جت و جت هـ} + \text{جاه ظت و}$$

وبتبدال الحروف ببعضها يحدث ست معادلات وهى

$$\text{ظت ز جت و} = \text{جت و جت هـ} + \text{جاه ظت و} \quad (٥)$$

$$\text{ظت و جت ا} = \text{جت ز جت هـ} + \text{جاه ظت د} \quad (٦)$$

$$\text{ظت ز جت هـ} = \text{جت و جت د} + \text{جاء ظت و} \quad (٧)$$

$$\text{ظت هـ جت ا} = \text{جت ز جت و} + \text{جاء ظت هـ} \quad (٨)$$

$$\text{ظت و جت هـ} = \text{جت هـ جت د} + \text{جاء ظت د} \quad (٩)$$

$$\text{ظت هـ جت و} = \text{جت و جت و} + \text{جاء ظت هـ} \quad (١٠)$$

(٩٩)

الرابعة النسبة بين ثلاث زوايا وضلع واحد ولم يبق الا البحث عنها

لايجاد هذه النسبة نحذف و هـ من معادلات (١) و (٢) و (٣)
ثم نضع فى الاولى مقدار جت هـ الذى استخرج من معادلة (٣) فيجد

كما سبق

$$\frac{\text{ج ت د ج ا و}}{\text{ج ا د}} = \text{ج ت د ج ت ه ه} + \frac{\text{ج ا ه ج ت و}}{\text{ج ا د}}$$

وهذه النسبة بواسطة هاتين المعادلتين

$$\frac{\text{ج ا و}}{\text{ج ا د}} = \frac{\text{ج ا و}}{\text{ج ا د}} + \frac{\text{ج ا ه}}{\text{ج ا د}} = \frac{\text{ج ا ه ج ت و}}{\text{ج ا د}}$$

تتغير بسهولة الى هذه المعادلة الاخرى

$$\text{ج ت د ج ا و} = \text{ج ت د ج ت ه ه} + \text{ج ت د ج ا ه}$$

فاذا اجريت هذه الحسابات على معادلة (٢) اعني غير فيها مقدار د و د بمقدار د و و اوبالعكس نخرج

$$\text{ج ت د ج ا د} = \text{ج ت د ج ا د ج ت ه ه} + \text{ج ت د ج ا ه}$$

فقد ثبت انه لم يبق ما يلزم حذفه الا ج ت و من المعادلتين الاخيرتين فيوجد بعد الاختصار الكلي النسبة المطلوبة بين د و و و ه و د و واذا طبقت هذه النسبة على الثلاث زوايا بالتوالي تجت هذه المعادلات الثلاث

$$\text{ج ت د} = \text{ج ت د ج ت ه ه} + \text{ج ا ه ج ت د} \quad (١١)$$

$$\text{ج ت و} = \text{ج ت د ج ت ه ه} + \text{ج ا د ج ا ه ج ت و} \quad (١٢)$$

$$\text{ج ت ه} = \text{ج ت د ج ت و} + \text{ج ا د ج ا و ج ت ه} \quad (١٣)$$

(١٠٠)

ومشابهة هذه المعادلات للقانون الاملي ظاهرة جدا وينتج من ذلك نتيجة نفيسة وذلك انا اذا تصورنا مثلثا كرويا د ه ا فاضلاعه د و و ه و و د ه متممة لزوايا د و و ه و فبقية القانون الاول يحدث

$$\text{ج ت د} = \text{ج ت د ج ت ه ه} + \text{ج ا و ج ا ه ج ت د}$$

والكن من حيث ان ج ا د = ج ا د و ج ت د = ج ت د و ج ت و = ج ا و

الخ يكون

$$\text{ج ت د} = \text{ج ت د ج ت ه ه} + \text{ج ا د ج ا ه ج ت د}$$

ويستخرج من هذه المعادلة لكمية ج ت د مقدار مساو لمقدار ج ت د الناتج

من معادلة (١١) بإشارة مخالفة له فيكون $180^\circ - \gamma = 1$ كما ان $180^\circ - \delta = 2$

فنتج من ذلك النتيجة المشار اليها وهي انه اذا علم مثلث كروي ورسم مثلث آخر اضلاعه متممة لزوايا المثلث المعلوم تكون اضلاعه الاول متممة لزوايا الآخر

ولمذا يقال لكل من المثلثين متممى ومن المعلوم في اصول الهندسة انه يمكن رسم كل منهما لجعل رؤس المثلث الاخر اقفا بآله ولهذه العلة يسمى كل واحد من المثلثين المذكورين قطبي الآخر

(١٠١)

في نسب المهندسين

ولنبرهن الان على النسب المسماة بنسب نيبير التي قد تستعمل لتسهيل بعض حالات من حل المثلثات الكروية فنقول

معادلة (١) و (٢) يحدث منهما

$$\begin{aligned} \text{جت هـ} - \text{جت د} &= \text{جت هـ} = \text{جا د} \text{ جا هـ} \text{ جت د} \\ \text{جت و} - \text{جت ز} &= \text{جت هـ} = \text{جا ز} \text{ جا هـ} \text{ جت و} \end{aligned}$$

فاذا قسم كلتا هاتين المعادلتين على الاخرى ونبه على ان $\frac{\text{جا د}}{\text{جا ز}} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جا و}}$

ينتج

$$\frac{\text{جت و} - \text{جت ز}}{\text{جت د} - \text{جت هـ}} = \frac{\text{جا و} \text{ جت د}}{\text{جا ز} \text{ جت و}}$$

فاذا وضعت هذه المعادلة على صورة متناسبة واعتبر فاضل حدود كل نسبة مع مجموع تلك الحدود فبالتحويلات السهل ادراكها يوجد

$$\frac{\text{جت و} - \text{جت ز}}{\text{جت و} + \text{جت ز}} = \frac{1 + \text{جت هـ}}{1 - \text{جت هـ}} \times \frac{\text{جا (و-د)}}{\text{جا (و+د)}}$$

واكن يقتضى القوانين المولومة في بند (٤٠) و (٣٧) و (٢٩)

يحدث

$$\frac{\text{جت هـ} - \text{جت د}}{\text{جت هـ} + \text{جت د}} = \frac{\text{ظا ر}}{\text{ظا ر}} \frac{(\text{د} + \text{هـ})}{(\text{د} - \text{هـ})} \quad \text{و}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{\text{جت هـ}}{\text{جت هـ}} = \frac{\text{ظا ا هـ}}{\text{ظا ا هـ}} \quad \text{و}$$

$$\text{جا} (\text{د} + \text{هـ}) = \text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ}) \text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ})$$

$$\text{جا} (\text{د} - \text{هـ}) = \text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ}) \text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ})$$

فاذا وضعت هذه المقادير في المعادلة التي قبلها حدث

$$\frac{\text{ظا ر}}{\text{ظا ر}} \frac{(\text{د} + \text{هـ})}{(\text{د} - \text{هـ})} = \frac{\text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ}) \text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ})}{\text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ}) \text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ})} \quad (م)$$

$$\text{ثم ان معادلة} \frac{\text{جا د}}{\text{جا د}} = \frac{\text{جا د}}{\text{جا د}} \text{ يستخرج منها}$$

$$\frac{\text{جا د} + \text{جا د}}{\text{جا د} - \text{جا د}} = \frac{\text{جا د} + \text{جا د}}{\text{جا د} - \text{جا د}}$$

ويمكن ان تحول هذه المعادلة الى معادلة اخرى كما في بند (٤٠) و (٣٩) هكذا

$$\frac{\text{ظا ر}}{\text{ظا ر}} \frac{(\text{د} + \text{هـ})}{(\text{د} - \text{هـ})} = \frac{\text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ}) \text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ})}{\text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ}) \text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ})}$$

فاذا ضربت هذه المعادلة في معادلة (م) وقسمت كل منهما على الاخرى

لا يبقى الا مربعات فاذا اخذ جذر هذه المربعات ونبه يمتضى معادلة (م)

على ان اشارتي ظا ر $\frac{1}{\text{ر}}$ ($\text{د} + \text{هـ}$) و جت $\frac{1}{\text{ر}}$ ($\text{د} + \text{هـ}$) متساويتان

نتج

$$\frac{\text{ظا ر}}{\text{ظا ر}} \frac{(\text{د} + \text{هـ})}{(\text{د} - \text{هـ})} = \frac{\text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} - \text{هـ})}{\text{جت} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{هـ})} \quad (١٤)$$

$$\text{ظا} \frac{1}{r} (\hat{x} - \hat{r}) = \text{ظا} \frac{1}{r} \hat{h} \quad \text{جا} \frac{1}{r} \frac{(\hat{s} - \hat{r})}{(\hat{s} + \hat{r})} \quad (١٥)$$

ويمكن تطبيق هاتين المعادلتين على المثلث القطبي ولاجل ذلك يؤخذ
 $١٨٠^\circ - \hat{r}$ و $١٨٠^\circ - \hat{s}$ و $١٨٠^\circ - \hat{h}$ و $١٨٠^\circ - \hat{x}$ و
 $١٨٠^\circ - \hat{y}$ بدل \hat{x} و \hat{r} و \hat{h} و \hat{s} و \hat{y} فينتج

$$\text{ظا} \frac{1}{r} (\hat{s} + \hat{r}) = \text{ظت} \frac{1}{r} \hat{h} \quad \text{جت} \frac{1}{r} \frac{(\hat{s} - \hat{r})}{(\hat{s} + \hat{r})} \quad (١٦)$$

$$\text{ظا} \frac{1}{r} (\hat{s} - \hat{r}) = \text{ظت} \frac{1}{r} \hat{h} \quad \text{جا} \frac{1}{r} \frac{(\hat{s} - \hat{r})}{(\hat{s} + \hat{r})} \quad (١٧)$$

فهذه القوانين الاربعة المذكورة التي على صورة متساويات هي التناسبات
 التي اخترعها المهندس نيبير والاوليان منها يستعملان فيما اذا كان المعلوم
 من المثلث الكروي ضلعان والزائتين المجاورتين له والاخران فيما اذا كان المعلوم
 ضلعين والزاوية التي بينهما

في النسبة بين اجزاء المثلثات الكروية القوانين الزاوية

(١٠٢)

لاجل ايجاد القوانين المتعلقة بمجالات المثلث الكروي القائم الزاوية يكفي
 ان نفرض $\hat{r} = ٩٠^\circ$ في التناسبات المتقدمة المشتقة على هذه الزاوية
 وبهذه الكيفية يوجد

$$(أ) \quad \text{جت} \hat{x} = \text{جت} \hat{r} \text{جت} \hat{h} \quad \text{كما في بند} \quad (٩٦)$$

$$(ب) \quad \text{جا} \hat{r} = \text{جا} \hat{x} \text{جا} \hat{y} \quad \text{وجا} \hat{h} = \text{جا} \hat{x} \text{جا} \hat{y} \quad \text{كما في} \quad (٩٧)$$

$$(ج) \quad \text{ظا} \hat{r} = \text{ظا} \hat{x} \text{جت} \hat{h} \quad \text{وظا} \hat{h} = \text{ظا} \hat{x} \text{جت} \hat{r} \quad (٩٨)$$

$$(د) \quad \text{ظا} \hat{r} = \text{جا} \hat{h} \text{ظا} \hat{y} \quad \text{وظا} \hat{h} = \text{جا} \hat{x} \text{ظا} \hat{y} \quad (٩٨)$$

$$(هـ) \quad \text{جت} \hat{r} = \text{جا} \hat{h} \text{جت} \hat{y} \quad \text{وجت} \hat{h} = \text{جا} \hat{x} \text{جت} \hat{y} \quad (٩٩)$$

$$(و) \quad \text{جت} \hat{x} = \text{ظت} \hat{r} \text{ظت} \hat{h} \quad (٩٩)$$

فالقانون الاول من هذه القوانين الستة المتميزة بسهولة العملية في الحسابات
 اللوغاريتمية يبين النسبة بين الوتر والضلعين المجاورين للزاوية القائمة والثاني
 منها يبين النسبة بين الوتر وضلع الزاوية المقابلة له والثالث يبين الوتر والضلع
 والزاوية المجاورة له والرابع يبين ضلعين والزاوية المقابلة لاحدهما والخامس يبين
 ضلعاً والزاويتين المحادتين والسادس يبين الوتر والزاويتين المحادتين فاذا علم
 جزءاً من الاجزاء الخمسة من مثلث كروى قائم الزاوية حدث قانون به يستخرج
 اى جزء من الثلاثة اجزاء الباقية

(١٠٣)

ولنبينه هنا على بعض خواص المثلثات الكروية الاضلاع القوائم الزاوية
 فنقول

الخاصة الاولى معادلة (١) نستلزم ان تكون اشارة جت عى اشارة
 حاصل ضرب جت عى جت هـ ولاجل ذلك يلزم ان تكون تمامات الجيوب
 الثلاثة موجبة او احداها فقط فعلى هذا تكون اضلاع المثلث الكروى القائم
 الزاوية اصغر من 90° او اثنان منها اكبر من 90° والثالث
 اصغر من 90°

الخاصية الثانية قانونا (٢) يستلزمان ان تكون اشارة ظاء عى
 اشارة ظاء واشارة ظاه عى اشارة ظاه فعلى هذا يكون
 الضلعان المجاوران للزاوية القائمة من نوع الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين
 اعنى ان الزاوية والضلع المتقابلين اصغرا واكبرا من 90°
 فى حل المثلثات الكروية القوائم الزاوية

(١٠٤)

المثلث الكروى يمكن ان يكون فيه زاويتان قائمتان او ثلاثة ففي الحالة الثانية
 يكون كل من الاضلاع الثلاثة مساوياً للربع محيط الدائرة وفي الحالة الاولى
 يكون كل من الضلعين المقابلين للزاويتين القائمتين مساوياً للربع محيط الدائرة
 والزاوية الثالثة معيارها الضلع الثالث وتلك الزاوية يكون مدلولها عليها بعدد

الدرج المشتل عليه ذلك الضلع وفي الحالة الثانية تكون الثلاثة اضلاع مساوية لثلاثة ارباع المحيط وهاتان الحالتان لا يستدعيان التكلم عليهما وانما اللازم ان نتكلم على المثلث السكروى الذى فيه زاوية قائمة فقط ويكفى في ايجاد هذا المثلث علم جريئين من الخمسة اجزاء ولذلك ست حالات نبينها فنقول

الحالة الاولى

(١٠٥)

اذا علم وتر δ وضلع γ وكان المطلوب ايجاد ضلع α وزاويتى α و β اخذت قوانين (١) و (-) و (ج) واستخرج منها

$$\frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \quad \text{و} \quad \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{و} \quad \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

ومن حيث ان الاقواس والزوايا التى نتكلم عليها لا تزيد عن 180° ولا يوجد في هذه النهاية الاقوس واحدة يقابل تمام الجيب المعلوم يتعين مقدار α و β بدون اشكال واما زاوية γ فن حيث انها معلومة بمقدار جيبها المقابل يظهر انه يمكن اخذها اما حادة او منفرجة على حد سواء لكن بمقتضى تناهيه (١٠٣) يلزم ان تكون تلك الزاوية من نوع الضلع المعلوم γ

(١٠٦)

الحالة الثانية

اذا كان المعلوم ضلعين α و β والزاوية القائمة والمطلوب تعيين وتر δ وزاويتى γ و δ يقال

من قانونى (١) و (د) يحدث

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} \quad \text{و} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}$$

وظاهر ان هذه المتبادير لا يكون فيها التباس

(١٠٧)

الحالة الثالثة

إذا كان المعلوم وتر \angle وزاوية \angle والمطلوب تعيين ضلعي \angle و \angle وزاوية \angle هـ يقال

من قوانين (-) و (هـ) و (و) يحدث
 جاء = جاء \angle و ظاه = ظاه \angle و ظت ه = جت \angle ظا
 و ه و ه يعينان بدون التباس وضلع \angle يكون من جنس \angle كما
 سبق في بند (١٠٣)

(١٠٨)

الحالة الرابعة

إذا كان المعلوم ضلع \angle المجاور للزاوية القائمة وزاوية \angle المقابلة لذلك
 الضلع والمطلوب تعيين ضلعي \angle و \angle وزاوية \angle هـ يقال
 من قوانين (-) و (د) و (هـ) يحدث

$$\frac{\text{جاء}}{\text{جاء}} = \frac{\text{جاه}}{\text{جاه}} = \frac{\text{ظاه}}{\text{ظاه}} = \frac{\text{جاء}}{\text{جاء}} = \frac{\text{جاه}}{\text{جاه}} = \frac{\text{ظاه}}{\text{ظاه}}$$

وهنا اشكال بسبب الجيوب ويسهل التحقق من انه لا بد وان يوجد ذلك لانه
 اذا كان المثلث القائم الزاوية في نقطة \angle الذي هو \angle كافيا في حل المسئلة
 يد ضلعا \angle و \angle على استقامتهما حتى يلتقيا في نقطة \angle ثم يؤخذ
 و \angle و \angle = \angle فيكون مثلثا \angle و \angle متساويي الاجزاء
 وتكون زاوية \angle قائمة ويكون \angle = \angle = \angle ويكون المثلث \angle قائم الزاوية ويشتمل على الجزئين المعلومين اللذين هما \angle و \angle فينتج من
 ذلك انه يمكن اخذ $\angle > 90^\circ$ او $\angle < 90^\circ$ ويمكن انك اذا اخترت واحدا
 منهما يكون جنس ضلع \angle معلوما من قانون

جت \angle = جت \angle و جت \angle وهذا الضلع يكون ايضا من جنس
 زاوية \angle هـ

فاذا فرض ان \angle = \angle حدث مثلث قائم الزاويتين بخلاف ما اذا فرض

ان جاء < جاء فلا يوجد مثلث ابدا

(١٠٩)

الحالة الخامسة

اذا كان المعلوم ضلع α المجاور للزاوية القائمة والزاوية المجاورة له β والمطلوب تعيين ضلعي γ و δ وزاوية ϵ يقال
من قواطين (γ) و (δ) و (ϵ) يحدث

ظا $\alpha = \frac{\text{ظا } \gamma}{\text{جت } \gamma}$ و ظا $\delta = \frac{\text{جت } \delta}{\text{جت } \gamma}$ و جت $\delta = \frac{\text{جت } \delta}{\text{جت } \gamma}$ و جت $\epsilon = \frac{\text{جت } \epsilon}{\text{جت } \gamma}$

فمن ذلك يعلم γ و δ و ϵ بدون التباس

(١١٠)

الحالة السادسة

اذا كان المعلوم زاويتي α و β الحادتين والمراد تعيين الاضلاع الثلاثة التي
هي γ و δ و ϵ يقال
من معادلتى (α) و (β) يحدث

جت $\alpha = \frac{\text{جت } \alpha}{\text{جت } \gamma}$ و جت $\beta = \frac{\text{جت } \beta}{\text{جت } \gamma}$ و جت $\epsilon = \frac{\text{جت } \epsilon}{\text{جت } \gamma}$

وهذه المقادير لا التباس فيها واذا كان المثلث مستقيما لا عرف ذلك من عين
هذه المقادير

(١١١)

* (تنبيه) *

كثير من احوال المثلثات الكروية يرجع الى حل المثلثات القوائيم الزاوية وبيان
ذلك ان تقول

الحالة الاولى اذا علم من مثلث كروي ثلاثة اجزاء منها ضلع يساوى 90°
كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع قائمة فبذلك يكون المعلوم من
المثلث القطبي جزئين من الخمسة اجزاء فيمكن حله بالطرق المتقدمة ومتى علم

هذا المثلث علم المثلث الاصلى

الحالة الثانية اذا كان المثلث متساوى الساقين لا يعد الضلعان المتساويان الاجزاء واحدا وكذلك الزاويتان المقابلتان لهما وحينئذ فيكون في جزء آن لتعيين المثلث لانه اذا وصل قوس دائرة عظمى من الرأس الى نصف القاعدة ينحل الى مثلثين قائمى للزاوية متساويين في جميع اجزائهم ما ومعلوم في كل منهما جزآن غير الزاوية انقاسمة فقد ثبت ان المثلثات المتساوية الساقين يمكن حلها بطريقة المثلثات القوائم الزاوية

الحالة الثالثة اذا فرض كما في شكل (٣٠) ان $\angle د هـ$ مثلث كروى فيه $\angle د + \angle هـ = 180^\circ$ ومد فيه ضلعا $\angle و هـ$ حتى تلاقي في نقطة و يحدث $\angle د + \angle هـ = 180^\circ$ فيكون $\angle د = \angle و$ وحيث ان كل جزء معلوم من مثلث $\angle د هـ$ يعلم منه جزء من مثلث $\angle د هـ و$ المتساوى الساقين وبالعكس يكون حل المثلث الذى يوجد فيه حاصل مجموع الضلعين يساوى 180° راجعا الى حالة حل مثلث متساوى الساقين وبالضرورة الى حل مثلث قائم الزاوية

الحالة الرابعة يمكن تطبيق ما تقدم على المثلث الكروى الذى فيه زاويتان متممتان لبعضهما لانه لا يمكن وجود $\angle د + \angle هـ = 180^\circ$ بدون وجود $\angle د + \angle و = 180^\circ$ فى آن واحد وبالعكس لانه فى مثلث $\angle د و هـ$ المتساوى الساقين زاوية $\angle د و = \angle و هـ$ فيكون $\angle د و + \angle هـ د = 180^\circ$ فيثبت ايضا فى مثلث $\angle د هـ و$ ان $\angle د + \angle و = 180^\circ$ فى حل المثلثات الكروية ايما كانت

(١١٢)

الحالة الاولى

اذا كان المعلوم الاضلاع الثلاثة $\angle د و هـ$ والمطلوب ايجاد الزوايا الثلاث $\angle د و هـ$ يقال

لايجاد زاوية د تؤخذ معادلة (١) التي سبقت في بند (٩٦) ويستخرج منها

$$\frac{\text{جت د} - \text{جت ز} \cdot \text{جت هـ}}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}} = \text{جت د}$$

لكن يمكن ايجاد مقدار آخر مناسب جد اللوغاريتمات بان يبحث عن $\frac{1}{\text{جا د}}$ و $\frac{1}{\text{جت د}}$ و $\frac{1}{\text{جا ز}}$ كما عمل في حساب المثلثات المستقيمة الاضلاع فالأخذ القانون السابق في بند (٣١) الذي هو

$$\text{جا د} = ١ - \text{جت د} \cdot \text{بوضع جت د فيه يحدث}$$

$$\frac{\text{جت د} - \text{جت ز} \cdot \text{جت هـ}}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}} = \frac{\text{جا د} - ١}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}}$$

$$\frac{\text{جت ز} \cdot \text{جت هـ} + \text{جا ز} \cdot \text{جاهـ} - \text{جت د}}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}} = \frac{\text{جت (ز-هـ)}}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}}$$

واذا فرض في القانون المعلوم الذي هو

$$\text{جت و} - \text{جت هـ} = \text{جا ز} \cdot \frac{1}{\text{جاهـ}} (\text{هـ} + \text{و}) \quad \text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{و-هـ}) \quad \text{ان هـ} = \text{د} \quad \text{وان} \\ \text{و} = \text{و-هـ} \quad \text{فيحدث}$$

$$\text{جت (ز-هـ)} - \text{جت د} = \text{جا ز} \cdot \frac{1}{\text{جاهـ}} (\text{د} + \text{ز-هـ}) \quad \text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د-و+هـ}) \quad \text{فيكون}$$

$$\left. \frac{\text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د} + \text{ز-هـ}) \cdot \text{جا} \frac{1}{\text{ر}} (\text{د-و+هـ})}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}} \right\} = \text{جا} \frac{1}{\text{د}}$$

$$\text{ولاجل الاختصار نضع} \quad \text{د} + \text{و} + \text{هـ} = \text{م} \quad \text{فيحدث}$$

$$\text{و} + \text{د-هـ} = \text{هـ} = \text{م} - \text{هـ} \quad \text{و} \quad \text{د-و+هـ} = \text{هـ} = \text{م} - \text{و} \quad \text{م} - \text{و}$$

وحينئذ يصير القانون السابق هكذا

$$\left. \frac{\text{جا (م-و)} \cdot \text{جا (م-هـ)}}{\text{جا ز} \cdot \text{جاهـ}} \right\} = \text{جا} \frac{1}{\text{د}}$$

ويوجد ايضا

$$\text{جت } \frac{1}{2} = \frac{\text{جام جا (م-ز)}}{\text{جا و جا هـ}}$$

$$\text{فينج ظا } \frac{1}{2} = \frac{\text{جا (م-ز) جا (م-هـ)}}{\text{جام جا (م-ز)}}$$

(١١٣)

الحالة الثانية

اذا كان المعلوم ضلعي $ز$ و $و$ وزاوية $و$ المقابلة لاحدهما والمطلوب تعيين زاويتي $هـ$ و $د$ وضلع $هـ$

يقال أولا يتبعني ايجاد زاوية $د$ المقابلة اضلع $و$ بوضع هذا التناسب
جا $ز$: جا $و$:: جا $د$: جا $و$
ومنه يستنتج

$$\text{جا } \frac{1}{2} = \frac{\text{جا } د \text{ جا } و}{\text{جا } ز}$$

ثم الاحسن ايجاد $هـ$ و $د$ من نسب نديمير السابقة في بند (١٠١) فانه
ينتج منها

$$\text{ظا } \frac{1}{2} = \frac{\text{ظا } (ز-و)}{\text{جا } \frac{1}{2} (ز+و)}$$

و

$$\text{ظا } \frac{1}{2} = \frac{\text{ظا } (ز-و)}{\text{جا } \frac{1}{2} (ز+و)}$$

وحيث ان زاوية $د$ تعرف من جيبها يمكن ان تكون حادة او منفرجة ومع ذلك لا يوجد لبعض مقادير معالم $ز$ و $و$ الامثال واحد
وسنذكر هذه الحالة فيما يأتي في بند (١١٨) وهي تشبه ما قدمناه

في الحالة الثانية من المثلثات المستقيمة الاضلاع في بند (٧٥)

ويمكن ايضا تعيين زاوية $هـ$ بدون واسطة باخذ معادلة (٥) السابقة
في بند (٩٨) هكذا

$$\text{ظا } \frac{1}{2} = \frac{\text{جت } ز + \text{جت } و}{\text{جت } هـ}$$

واما هذا يلزم اولا تعيين زاوية ع المساعدة بوضع

ظت ح = جت و ظت ع فيكون

$$\frac{\text{ظت ح}}{\text{جت و}} = \text{ظت ع}$$

ثم نضع في معادلة ظت ح حاه + جت و جت هه = ظت ح جات و بدل
ظت ح مقدار ه الذي هو

$$\text{ظت ح} = \text{ظت و} \times \text{ظت ع} = \frac{\text{جت و جت ع}}{\text{جاء}} \text{ الذي يؤخذ منه}$$

جت و (جاء جت ع + جت ه جاع) = ظت ح جات و جاع
ومن ذلك يستنتج

$$\frac{\text{ظا و جاع}}{\text{ظا ح}} = \text{جا (ه + ع)}$$

فيعلم من ذلك ه + ع فاذا كان مثلا ه + ع = م يكون
ه = م - ع

وحيث علم مقدار ه يعلم ضلع ه من متناسبة

جار : جاه :: جات : جاه

لكن اذا اريد تعيين ه بدون واسطة وجبت الاستعانة بمعادلة (١) السابقة

في بند (٩٦) وهي

جت و جت هه + جت ح جات و جاه = جت هه

فيلزم اختصار الطرق الاول وجعله حدا واحدا كما تقدم بواسطة زاوية ع

المساعدة بان توضع هذه المعادلة

جت ح جات و = جت و ظت ع

فيكون ظت ع = جت ح ظا و وحينئذ فالمعادلة تصير

جت و (جاء جت هه + جت ع جاه) = جت ح جاع او

$$\frac{\text{جت ح جاه}}{\text{جت و}} = \text{جا (ه + ع)}$$

حينئذ يمكن بعد ايجاد زاوية ع ايجاد زاوية هـ بالسهولة كما تقدم
(١١٤)

الحالة الثالثة

اذا كان المعلوم ضلعي د و و الزاوية التي بينهما والمطلوب تعيين زاويتي
د و د و ضلع هـ
يقال قانونا (٥) و (٦) المتقدمان في بند (٥٨) يفيدان مقدار
د و د اللذان هما

$$\text{ظ د} = \frac{\text{ظ د ج} - \text{ج د جت هـ}}{\text{ج هـ}}$$
$$\text{ظ د} = \frac{\text{ظ د ح} - \text{ج د جت هـ}}{\text{ج هـ}}$$

وبالاستعانة بزاويتي مساعدتين يسهل تحويل بسط كل مقدار الى جد واحد
لكن الاسهل الاستعانة بنسب المهندسين بتدبير المذکور في بند (١٠١)
هكذا

$$\text{ظ د} = \frac{\text{ج د جت هـ}}{\text{ج د جت هـ}} \quad \text{و}$$
$$\text{ظ د} = \frac{\text{ج د جت هـ}}{\text{ج د جت هـ}}$$

فانه يعلم من هذين المقدارين $\frac{1}{r} (د + د)$ و $\frac{1}{r} (د - د)$ ومن ذلك
يعلم د و د
ومتى علمت هاتان الزاويتان امكن ايجاد ضلع هـ بواسطة هذه
المتناسبة

ج د : ج هـ :: ج د : ج هـ لكن اذا اريد ايجاد هـ بدون
واسطة وجبت الاستعانة بالقانون المذكور في بند (٩٦) الذي هو
جت هـ = ج د جت د + ج د ج د جت هـ

$$\text{المفروض فيه ان جاد جت ه} = \frac{\text{جت ز جت ع}}{\text{جاع}} = \text{جت ز ظت ع}$$

وحينئذ يوجد بدون لبس هذان المقداران

$$\text{ظت ع} = \text{ظا ز جت ه} \quad \text{وجت ه} = \frac{\text{جت ز ج ا (ع + ح)}}{\text{جاع}}$$

(١١٥)

الحالة الرابعة

اذا كان المعلوم زاويتي • و د وضع ز المجاور لهما تبين الزاويتين
والمطلوب تعيين ضلعي ح و ز زاوية ه
يقال يمكن ايجاد ضلعي ح و ز من قانوني (٧) و (٩) المتقدمين
في بند (٩٨) هكذا

$$\text{ظت ح} = \frac{\text{ظت د ج ا + جت د جت ه}}{\text{ح ا ه}}$$

$$\text{ظت ز} = \frac{\text{جت د ج ا + جت د جت ه}}{\text{ج ا ه}}$$

والاحسن ايجاد هذين الضلعين من نسبة المهندسين نيسير فيجد ث

$$\text{ظا } \frac{1}{r} (ح + ز) = \text{ظا } \frac{1}{r} \text{ ه} = \frac{\text{جت } \frac{1}{r} (د - ح)}{\text{جت } \frac{1}{r} (د + ح)}$$

$$\text{ظا } \frac{1}{r} (ح + ز) = \text{ظا } \frac{1}{r} \text{ ه} = \frac{\text{جا } \frac{1}{r} (د - ح)}{\text{جا } \frac{1}{r} (د + ح)}$$

حينئذ تتعين زاوية ه بهذه المتناسبة

$$\text{ج ا ح} : \text{ج ا ه} :: \text{ج ا د} : \text{ج ا ز}$$

واذا اريد تعيين زاوية ه بدون واسطة وجبت الاستعانة بالقانون السابق
في بند (٩٩) الذي هو

$$\text{جت ه} = \text{جت د ج ا ز جت ه} - \text{جت د جت د}$$

$$\frac{\text{جت د جاع}}{\text{جت د}} = \text{جا (هـ - ع)} \quad \text{و} \quad \text{ظت ع} = \text{جت ح ظاد}$$

وهذه المقادير تعين زاوية ع و هـ - ع وبذلك تعين زاوية هـ

(١١٧)

الحالة السادسة

اذا كان المعلوم الزوايا الثلاث δ و ϵ و θ والمطلوب تعيين الاضلاع الثلاثة δ و ϵ و θ

يقال ان هذه الحالة تنحل بمثل الحسابات المذكورة في الحالة الاولى فاذا اريد تعيين ضلع δ مثلاً استعملت معادلة (١١) السابقة في بند (٩٩) فيحدث عنها

$$\frac{\text{جت د} + \text{جت د جت هـ}}{\text{جا د جا هـ}} = \text{جت } \delta$$

ثم بواسطة التحويلات الجارية في الحالة المذكورة توجد مقادير $\text{جا } \frac{1}{2} \delta$ و $\text{جت } \frac{1}{2} \delta$ و $\text{ظا } \frac{1}{2} \delta$ وهذه المقادير سهلة الحسابات اللوغاريتمية فاذا وضعنا $\delta + \epsilon + \theta = 180^\circ + 2\epsilon$ حدث

$$\text{جا } \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{\text{جام جا (م - د)}}{\text{جا د جا هـ}}} \quad \text{و}$$

$$\text{جت } \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{\text{جا (د - م) جا (م - هـ)}}{\text{جا د جا هـ}}} \quad \text{و}$$

$$\text{ظا } \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{\text{جام جا (م - د)}}{\text{جا د - م جا (م - هـ)}}}$$

ومساهمة الاحوال الثلاث الاخيرة للثلاث الاول انما هي بسبب كونها ترجع اليها بواسطة خواص المثلث القطبي المذكور في بند (١٠٠)

الكلام على الحالات المشكوك فيها

من المثلثات الكروية

(١١٨)

ليس لنا حالات يشك فيها من حيث اصولها المجهولة الاحالة الثانية
والخامسة وغرضنا هنا البحث عن الدلائل التي يعرف بها لزوم حلين
للمسئلة او حل واحد والتي يعرف بها استحالة المثلث ولندكر قبل ذلك بعض
مسائل يستند اليها فنقول

اذا اعتبر على كرة معلومة ان نصف دائرة وهو $\text{كافي شكل } (٣١)$ عموديا
على دائرة كاملة وف $\text{واخذنا هو } > ٩٠^\circ$ ووصلنا اقواس دوائر
عظمى $\text{هو } \text{و هو } \text{هـ ف } \dots\dots\dots$ الخ من نقطة هـ الى كل
نقطة من نقط محيط دائرة وف $\text{ومددنا هو بقدر هو ووصلنا بين}$
 $\text{هو و حدث مثلثان هو و هو فيهما زاوية قائمة محصورة بين}$
 $\text{ضلعين متساويين فيكون هو = هو وحيث ان هو هـ}$
 $> \text{هو + هو يكون هو } > \text{هو فينتج من ذلك اولا ان قوس هو}$
 $> \text{الاقواس المارة من نقطة هـ الى محيط دائرة وف}$
 $\text{وحيث ان يكون } < \text{الاقواس هو}$

فاذا فرضنا ان $\text{هو = هو فثلثا هو و هو يكونان متساوي}$
الزاوية القائمة المحصورة بين الضلعين المجاورين لهذه الزاوية فيكون هو = هو
فينتج ثانيا ان الاقواس الموائمة المتساوية الابعاد من هو او من
هو متساوية

واذا فرضنا ان $\text{حـ ف و وصلنا هـ ف ومددنا هو حتى تلاقى مع}$
 $\text{هـ ف في نقطة ع يقال حيث ان قوس هو اقل من نصف دائرة يلزم}$
 $\text{ان يتلاقى مع هو الممدود فيما وراء نقطة هـ ويلزم من ذلك ان نقطة التقابل}$
 $\text{ع تكون بين ف و هـ فحدث هو } > \text{هـ ع + ع و}$
 $\text{هو + هو } > \text{هـ ع + هـ ولكن حيث كان ع هـ } > \text{ع ف + ف هـ}$
 $\text{وبالضرورة هو ع + هـ } > \text{هـ ف + هـ فبالاولوية ينتج ان هو + هو}$
 $> \text{هـ ف + هـ ف وحيث ان هو = هو و هـ ف = هـ ف يجب ان}$

يكون ده > فيه فينتج ثالثا ان الاقواس الموائل كما بعدت عن هو
وقربت من هو وازدادت كبرا

(١١٩)

ولنفرض الآن ان المطلوب رسم مثلث كروي معلوم منه ضلعان δ و ϵ
والزاوية المقابلة لـ δ

فننبه اولاً على بعض احوال غير ممكنة الرسم كما تدل على ذلك الحسابات ثم نقول
لاجل معرفة ذلك ترسم زاوية $\delta = \delta$ و $\epsilon = \epsilon$ كما في شكل (٣٢)

و (٣٣) ويعد δ و ϵ حتى يتقابل في نقطة ط كما في شكل (٣٢)
ثم ينزل هو عودا على ط فيكون قوس هو من نوع زاوية

δ كما في بند (١٠٣) فينبغي على ذلك ان زاوية δ اذا كانت حادة كان
هو واقرب المسافات بين نقطة ه ونصف دائرة ط واكبر المسافات

اذا كانت زاوية δ منفرجة كما في النتيجة الاولى من بند (١١٨)
ثم ان رسم المثلث في الفرض الاول غير ممكن اذا كان $\delta > \epsilon$ وينشأ منه

ان جاء $\delta > \epsilon$ وفي الفرض الثاني كذلك اذا كان $\delta < \epsilon$ وينشأ منه
ان جاء $\delta > \epsilon$ وحيث ان المثلث القاسم الزاوية δ هو يحدث فيه

١ : جاء :: جاء : جاء هو = جاء جاء
ففي الحالتين المقروضتين يحدث ان جاء > جاء جاء واذا بحثنا عن زاوية δ
من المثلث المجهول هو يحدث

$$\frac{\text{جاء}}{\text{جاء}} = \frac{\text{جاء}}{\text{جاء}}$$

فيكون مقدار جاء < ١ ومن ذلك يظهر انه لا يمكن رسم المثلث واذا فرض
ان $\delta = \epsilon$ هو لا يوجد الا المثلث القاسم الزاوية δ هو الذي يمكن رسمه

وذلك يستفاد من مقدار جاء الذي يؤول الى جاء = ١
(١٢٠)

ولنترك الآن هذه الاحوال ونلتفت الى البحث عن ارتباطات الكبر المختلفة

الكائنة بين الكميات المعلومة $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$
 فنفرض $\hat{\alpha} > 90^\circ$ و $\hat{\beta} > 90^\circ$ كما في شكل (٣٢) وحيث ان
 $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ يكون ايضا $\hat{\gamma} > 90^\circ$ كما في بند (١٠٣)
 فيكون $\hat{\gamma} > 90^\circ$ و $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ اذا ثبت هذا وكان $\hat{\alpha} > 90^\circ$ كان من البين انه يمكن
 ان يوضع بين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هو قوس مقداره هو $\hat{\gamma}$ ويمكن ايضا
 ان يوضع بين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هو قوس آخر مقداره هو $\hat{\gamma}$ = $\hat{\delta}$ بمعنى
 انه يوجد مثلثان $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ مرسومان بمعايير $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$
 واذا كان $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ خفي مثلث $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ وبقى $\hat{\gamma}$ واذا كان $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$
 $= 180^\circ$ او $\hat{\alpha} + \hat{\beta} < 180^\circ$ صارت نقطة $\hat{\gamma}$ على نقطة ط
 او بعيدة عنها فلا يوجد من المثلثات شيء
 وبهذه الكيفية تتحقق الفروض الاخرى واذن نضع جدولاً نذكر فيه جميع نتايجها
 ونشير فيه بعلامة $\hat{\alpha}$ الى المساوي والا كبر وعلامة $\hat{\beta}$ الى المساوي والا اصغر
 وهذه صورته

لذلك حلان		$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} > 90^\circ \\ \hat{\beta} < 90^\circ \\ \hat{\gamma} = 90^\circ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} > 90^\circ \\ \hat{\beta} < 90^\circ \\ \hat{\gamma} = 90^\circ \end{array} \right\}$
$\hat{\alpha} < 180^\circ$			
$\hat{\beta} < 180^\circ$			
$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} < 180^\circ \\ \hat{\beta} < 180^\circ \end{array} \right\}$		$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} < 90^\circ \\ \hat{\beta} < 90^\circ \\ \hat{\gamma} = 90^\circ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} < 90^\circ \\ \hat{\beta} < 90^\circ \\ \hat{\gamma} = 90^\circ \end{array} \right\}$
$\hat{\alpha} < 180^\circ$			
$\hat{\beta} < 180^\circ$			
$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} < 180^\circ \\ \hat{\beta} < 180^\circ \end{array} \right\}$		$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} < 90^\circ \\ \hat{\beta} < 90^\circ \\ \hat{\gamma} = 90^\circ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} < 90^\circ \\ \hat{\beta} < 90^\circ \\ \hat{\gamma} = 90^\circ \end{array} \right\}$
$\hat{\alpha} < 180^\circ$			
$\hat{\beta} < 180^\circ$			

$$\left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \hat{x} + \hat{z} < 180^\circ \text{ له حلان} \\
 \hat{z} > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \text{ له حل واحد ما لم تكن } \hat{x} > \hat{z} \\ \hat{x} < \hat{z} \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right. \\
 \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \hat{x} < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} < \hat{z} \text{ له حلان} \\ \hat{x} > \hat{z} \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \text{ له حل واحد ما لم يكن } \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \\ \hat{x} + \hat{z} < 180^\circ \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right. \\
 \end{array} \right\} \\
 \hat{z} = 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} < \hat{z} \text{ له حلان} \\ \hat{x} > \hat{z} \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \hat{x} < \hat{z} \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \text{ له حل واحد ما لم يكن } \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \\ \hat{x} + \hat{z} < 180^\circ \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right. \\
 \hat{z} > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} > \hat{z} \text{ لا حل له اصلا} \\ \hat{x} < \hat{z} \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \text{ له حل واحد ما لم يكن } \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \\ \hat{x} + \hat{z} < 180^\circ \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right. \\
 \end{array} \right\} \\
 \hat{z} = 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} < \hat{z} \text{ له حل واحد ما لم يكن } \hat{x} + \hat{z} > 180^\circ \\ \hat{x} > \hat{z} \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \hat{x} = 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{له طرق حل غير منتهية} \\ \hat{x} > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} > \hat{z} \text{ لا حل له اصلا} \end{array} \right. \\
 \end{array} \right\}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

(١٢١)

بمقتضى خاصية المثلث القطبي يمكن تطبيق الحواصل السابقة على المثلث المعلوم منه زاويتان \hat{x} و \hat{z} وضلع \hat{c} وهذه هي الحالة الخامسة المتقدمة في بند (١١٦) ويجب فقط تغيير \hat{x} و \hat{z} و \hat{c} بحروف \hat{y} و \hat{z} و \hat{c} و ابدال علامة $<$ بعلامة $>$ وبالعكس فتى وقعت المعاليم في احدى الاحوال التي ليس فيها الاحل واحدا فالحسابات تبين حلين ولاجل ان يختار الحل الموافق يلزم ان نلاحظ ان الزوايا الكبرى تكون مقابلة للاضلاع الكبرى

وبالعكس فإذا فرضنا ان المعلوم $\angle = 112^\circ$ و $\angle = 102^\circ$ و $\angle = 90^\circ$
 في الجدول السابق نعتبر من جميع الحالات المقابلة الى $\angle < 90^\circ$
 الحالات التي فيها $\angle < 90^\circ$ ومن هذه الاخيرة نعتبر الحالة التي فيها $\angle > 90^\circ$
 وتلاحظ ايضا انه من حيث ان $\angle + \angle = 180^\circ$ يكون
 $\angle + \angle < 180^\circ$ وينتج بمقتضى الجدول انه لا يوجد الا حل واحد وحيث ان
 $\angle < 90^\circ$ تكون زاوية $\angle < 90^\circ$ ومنفرجة

عمليات حساب المثلثات الكروية

(١٢٢)

العملية الاولى

المطلوب تحويل زاوية الى الافق

حله

إذا فرضنا ان \angle هو موضوع في سطح مائل و \angle الخط الرأسى المار
 من رأسها \angle ثم رسمنا بالاختيار مستويا قويا \angle يتلاقى مع الخطوط
 \angle و \angle و \angle في نقط \angle و \angle و \angle تكون زاوية \angle سطح
 هي المسقط الافقى لزاوية \angle وبعبارة اخرى تكون زاوية \angle هي
 المحولة على الافق وزاوية \angle هي المطلوب ايجادها بفرض معرفة
 الزوايا \angle و \angle و \angle التي تقاس بالالة

ويسهل حل هذه العملية بالطريقة الرسمية ايضا وذلك لان خط \angle حيث
 كان اختياريا يوجد من المعاليم ما يكفي في رسم المثلثين القائمى الزاوية \angle و \angle
 و \angle ثم في رسم مثلث \angle ثم في رسم مثلث \angle

ويسهل ايضا حساب زاوية \angle بواسطة الطريقة الرقية لانتال ورسمنا
 كرة من مركز \angle بنصف قطر ما لعين مستقيمت \angle و \angle و \angle مثلثا
 كرويا \angle اضلاعه معلومة الدرج بواسطة زوايا معلومة وزاوية \angle هو
 التي فيه هي عين الزاوية المطلوبة \angle فقط ثبت ان حل المسئلة انما هو

بواسطة الحالة الاولى من احوال حل المثلثات الكروية المطلقة الفرض انظر
بند (١١٢) اعني انه يلزم لذلك الاستعانة بقانون

$$\frac{\text{جا } \frac{1}{2} = \frac{\text{جا } (م - ز) \text{ جا } (م - هـ)}{\text{جا } ز \text{ جا } هـ}}$$

ولنفرض فيه ان $ز = د هـ$ و $د = هـ$ و $هـ = هـ د$ و
 $م = \frac{1}{4} (ز + د + هـ)$ كما نفرض فيه ايضا ان

$$ز = ٣٩^\circ ٤٥' ٤٧'' \text{ و } د = ١٩^\circ ٤٩' ٦٩'' \text{ و } هـ = ٣٦^\circ ١٧' ٨٠''$$

$$\text{فيجد } م = ٣٤^\circ ٥٢' ١٩٧'' \text{ و } م = ١٧^\circ ٥٦' ٩٨''$$

$$\text{و } م - ز = ٨^\circ ٥٨' ٢٩'' \text{ و } م - هـ = ١^\circ ٤٨' ٣٨''$$

وهذه صورة الحسابات

$$\text{لوجا } (م - ز) = ٩,٦٨٧١٥٥٢$$

$$\text{لوجا } (م - هـ) = ٩,٥٠٤٧٤١٢$$

$$\text{لوجا } ز = ٠,٢٧٥٠٧٨$$

$$\text{لوجا } هـ = ٠,٠٠٦٢٦٢٣$$

$$\text{لوجا } \frac{1}{2} = ١٩,٢٢٥٦٦٦٥$$

$$\text{لوجا } \frac{1}{4} = ٩,٦١٢٨٣٣٢$$

$$\frac{1}{4} = ٢٤^\circ ١٢' ٢٧,٩''$$

$$= ٥٦^\circ ٢٤' ٤٨''$$

(١٢٣)

العملية الثانية

اذا فرضنا ان طولى محلين من الكرة وعرضيهما معلومان والمطلوب معرفة البعد
بين هذين المحلين

يفرض ان محلي $د$ و $ز$ هما المحلان المطلوب اجراء العملية عليهما ويفرض

ان $م$ ط خط الاستواء وان $ف$ القطب الشمالي وان $ف د هـ$ و

$ف هـ$ خطان في النهار الماران بالمحليين المذكورين $د$ و $ز$ ثم يفرض ايضا

ان الاطوال تعد من ابتدا نقطة - في جهة - روز
 ثم يقال ان فاضل طولى - ز - و يساوى قوس زو او زاوية هـ
 المحصورة بين خطى نصف النهار وان قوسى هـ و د هـ تماما عرضى هـ و
 و دز المعلوماتين فيثبت يكون قد علم من المثلث الكروى هـ د هـ الضلعان
 المجاوران للزاوية هـ و زاوية هـ فيكون المطلوب حينئذ معرفة الضلع
 الثالث هـ د وبمقتضى ما في بند (١١٤) يكون ضلع هـ د او هـ
 معينان من قانونى

طلب ع = ظا د جت هـ

$$\text{جت هـ} = \frac{\text{جامد جا (د + ع)}}{\text{جامد}}$$

فاذا فرضنا ان المطلوب معرفة المسافة بين مدينة ابريسته ومدينة كيانة من
 مدن فرانسا يقال قد وجد في دفتر ديوان الاطوال السنوى المصنوع
 بالملك المذكورة في سنة ١٨٢٨ مسيحية ان طول بريسته =

٥٤ ٣٥ ° و عرضها = ٤٨ ٢٣ ١٤ ° وطول كيانة = ٥٤ ٣٥ °

و عرضها = ٥٦ ١٥ ° وطولاهاتين البلدين غربيان ومعدودان من

مبداء نصف نهار باريس اما عرضاهما فشماليان فن هذه المعاليم يوجد اولاً

$$\text{هـ} = (٥٤ ٣٥) - (٥٦ ١٤) = ٤٧ ٤٦ °$$

$$\text{ب} = (٤٨ ٢٣ ١٤) - (٥١ ٣٦ ٤٦) = ٩٠ °$$

$$\text{د} = (٥٦ ١٥) - (٥٤ ٣) = ٨٠ °$$

ثم يبحث عن هـ هكذا

(حساب ضلع هـ)	(حساب الزاوية المساعدة ع)
لوجت هـ = ٨,٩٣٤٨٤٦٨	لوجت هـ = ٩,٨٢٧٤٦٧١
لوجا (ع + هـ) = ٩,٨٧٧٣٦٢١	لوظا هـ = ١١,٠٦٣٥٣٨٦
لوجاع = ٨,٩٤٥٦٤٢	
لوجت هـ = ٩,٧٠٦٧٧٣١	لوظت ع = ١٠,٨٩١٠٠٥٧
فيكون هـ = ٣٨, ٥٤ ٢٣ ٥٩	فيكون ع = ٧٠ ١٩ ٢٦
	و هـ + ع = ١٢ ٥٦ ٤٨

حينئذ يكون مقدار القوس الذي يقاس به البعد الذي من بريسته الى كيان
 ٣٨, ٥٤ ٢٣ ٥٩ ولاجل تحويله الى الميرياميتر يلزم ان يتدكر ان ربع
 محيط دائرة نصف النهار الارضى = ١٠٠٠٠٠٠٠ متر اي ١٠٠٠
 ميرياميتر فتنتج هذه المتناسبة

$$٩٠ : ٣٨, ٥٤ ٢٣ ٥٩ :: ١٠٠٠ : س$$

وبتحويل الاقواس الى ثواني يوجد

$$س = \frac{١٠٠٠ \times ٢١٣٨٣٤, ٣٨}{٣٢٤٠٠٠} = ٦٥٩, ٩٨٣ \text{ ميرياميتر}$$

وهذا التحويل الاخير سهل اذا كان قوس هـ معيناً بالدرج المائني لانا اذا
 فرضنا على التقسيم الجديد ان قوسا = ٦٩ ٤٥ ٣٧ ثم نسبناه الى ربع
 المحيط فان مقداره يكون ٣٧٤٥٦٩. فاذا ضرب هذا المقدار في مقدار

ربع المحيط بتحويله الى الميرياميتر يوجد بمجرد تغيير وضع الشرطة
 ٣٧٤, ٥٦٩ ميرياميتر ولا حاجة الى تكثير الامثلة هنا ومن اراد ذلك فعليه
 بالكتب المختصة بعمليات علم المثلثات

الباب الرابع

في بيان قوانين تسعمل في الرياضيات العالية وفي تحويل الجيب وجيب
 التمام الى متسلسلات وفي حل المعادلات ذات الحدين والمعادلة بدرجة ثالثة

في الكلام على قانون المهندس مواور
وفيما يراد فيه من كلمة مضروب

(١٢٤)

القانون المنسوب للمهندس مواور الفرنسي لكونه استكشفه هو

$$(ج ت ه + ١ - \gamma \text{ جاه})^2 = ج ت ه + ١ - \gamma \text{ ج ا ه} \quad (١)$$

وهو يدل على انه لاجل رفع كمية ذات حدين ج ت ه + ١ - \gamma \text{ ج ا ه} الى
درجة ما يكفي ضرب قوس ه في اس هذه الدرجة ويمكن وضع علامة
+ او علامة - امام ١ - \gamma بالتسوية لان هذا يرجع الى تغيير ه
بكمية - ه وانما يحتاج فيما يأتي الى صورة ما اذا كان الاس عددا

صححا موجبا وهي التي نعتبرها اولا فنقول

بواسطة الضرب يوجد

$$(ج ت ه + ١ - \gamma \text{ جاه}) (ج ت ه + ١ - \gamma \text{ ج ا ه}) = ج ت ه ج ت ه$$

$$+ ج ا ه ج ا ه + ١ - \gamma (ج ا ه ج ت ه + ج ت ه ج ا ه) \text{ وحيث علم من القوانين}$$

$$\text{السابقة في بند (٢٦) ان الجزء الحقيقي من هذا الحاصل} = ج ت ه (ه + و)$$

$$\text{والجزء التخيلي} = ١ - \gamma \text{ ج ا ه} (ه + و) \text{ يكون}$$

$$(ج ت ه + ١ - \gamma \text{ جاه}) (ج ت ه + ١ - \gamma \text{ ج ا ه}) =$$

$$ج ت ه (ه + و) + ١ - \gamma \text{ ج ا ه} (ه + و)$$

يعني انه اذا ضربت كيتان في بعضهما صورة كل منهما ج ت ه + ١ - \gamma \text{ جاه}

يكون الحاصل كمية متشابهة لهما من كمية من قوسين مجموعين الى بعضهما

ولاجل ضرب الحاصل في مضروب جديد صورته كالصورة المتقدمة يكفي

جمع القوس الجديد الى الاثنين الاولين وهكذا يفعل اباما كان عدد

المضارب

فاذا فرض ان مضارب متساوية ج ت ه + ١ - \gamma \text{ جاه}

حدث

$$(ج ت ه + ١ - \gamma \text{ جاه}) = ج ت ه + ١ - \gamma \text{ ج ا ه} \quad (١)$$

ولنعبر الحالة التي يكون فيها الاس كسرا فبوضع $\frac{ه}{د}$ بدل ه
ينتج من قانون (١)

(جت $\frac{ه}{د}$ + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) = جت ه + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه
واذا اخذ الجذر المميز بدرجة $\frac{١}{د}$ ووضع اس كسرى بدل علامة الجذر
ثبت قانون (١) لاس $\frac{١}{د}$ لانه يحدث

(جت ه + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) = (جت $\frac{ه}{د}$ + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) (٢)

وعلى العموم مقدار $\frac{١}{د}$ يدل على انه يلزم رفع د الى درجة م واخذ
جذرا الحاصل المميز بدرجة $\frac{١}{د}$ وينتج من ذلك انه اذا رفع جت ه +
 $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه كفاي قانون (١) الى اس م واخذ الجذر المميز بدرجة
 $\frac{١}{د}$ كفاي قانون (٢) حدث

(جت ه + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) = جت $\frac{ه}{د}$ + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا $\frac{ه}{د}$ (٣)
وهذا القانون عين قانون (١) الذي غريفه $\frac{١}{د}$ بكسرا موجب $\frac{١}{د}$

واخير اذا كان الاس سالبا نلاحظ ان

(جت $\frac{ه}{د}$ + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) (جت $\frac{ه}{د}$ - $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) =
جت $\frac{ه}{د}$ + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه = ومنها ينتج

$\frac{١}{جت \frac{ه}{د} + \frac{١}{د} - \frac{١}{د} جا ه} = \frac{١}{جت \frac{ه}{د} - \frac{١}{د} - \frac{١}{د} جا ه}$
او هذه المعادلة

(جت ه + $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه) = جت ه - $\frac{١}{د}$ - $\frac{١}{د}$ جا ه (٤)
وهذه عين التي قبلها وحينئذ قانون (١) يكون حقيقيا سواء كانت كمية
 $\frac{١}{د}$ مقدارا موجبا او سالبا

وقد تركنا الحالة التي فيها الاس عددا جذريا لانه لا فائدة فيها ما لم يبدل
ذلك باعداد نهائية فانه يقل اختلافها عنها بقدر ما يراد واما الاسوس
التخيلية فلا يمكن تفسيرها بطريقة ما

(١٢٥)

قانون (١) وان كان سهم لا يطيقا فيه خلل عظيم جدا اذا كان الاس كسرا وذلك ان الطرف الاول منه حيث كان مكافيا بالجزر يلزم ان تكون له جلة مقادير مع ان الطرف الثاني ليس له الا مقدار واحد ولذا كرمسائل الغرض منها تصحيح هذا الخلل فنقول

لنرجع الى قانون (٢) الذي فيه كمية \div عدد صحيح موجب وبمقتضى القواعد الجبرية يلزم ان يكون للطرف الاول المكافى γ جت هـ + $\gamma - ١$ جاه مقادير مختلفة عددها \div ولاجل ان تنتج جميع المقادير المذكورة من الطرف الثانى نبرهن على انه يكفي استعواض هـ بجميع الاقواس التى جيوبها وجيوب تماماتها مثل هـ

ثم ان مقدار الاقواس العمومى هو (هـ + كط) بالرمز الى محيط الدائرة بحرف ط والى اى عدد صحيح موجب او سالبا بحرف ك فبوضع هـ + كط بدل هـ يكون الطرف الثانى من قانون (٢) هكذا

$$\text{جت} \frac{\text{هـ} + \text{كط}}{\div} + \gamma - ١ \text{ جا} \frac{\text{هـ} + \text{كط}}{\div} \quad (٥)$$

وفى هذه الحالة نقول ان مقادير هذا الطرف عين مقادير الطرف الاول لانه يقال

اولا حيث ان كميته \div عدد صحيح ينظم راننا بمقتضى قانون (١) انه اذا رفع الطرف الثانى الى درجة \div يلزم ان يرجع الى جت هـ + $\gamma - ١$ جاه وثانيا اذا فرض بالتوالى ان كميته \div و $\div = ١$ و $\div = ٢$ $\div = ١$ توجد مقادير مختلفة عددها \div لانه اذا فرض فى مقدارى

$$\begin{aligned} &\text{جت} \frac{\text{هـ} + \text{كط}}{\div} + \gamma - ١ \text{ جا} \frac{\text{هـ} + \text{كط}}{\div} \\ &\text{جت} \frac{\text{هـ} + \text{كط}}{\div} + \gamma - ١ \text{ جا} \frac{\text{هـ} + \text{كط}}{\div} \end{aligned}$$

من المقادير المقدمة ان \hat{x} و \hat{z} عددان صحيحان $\hat{z} > 0$ يلزم لاجل
تساوى هذين المقدارين تساوى الاجزاء الحقيقية ببعضها والاجزاء التخيلية
كذلك

$$\frac{\hat{h} + \hat{z}\tau}{\hat{z}} \text{ و } \frac{\hat{h} + \hat{x}\tau}{\hat{x}}$$

مساويا المحيط دائرة او عدة محيطان دوائر وهذا الناضل الذي هو $\frac{(\hat{x} - \hat{z})\tau}{\hat{z}}$

اقل من τ بناء على ان \hat{x} و \hat{z} اصغر من ∞
وثالثا اذا جعلنا الكمية k مقادير غير 0 و 1 و 2
 $1 - \hat{z}$ لا يوجد مقادير جديدة لان جميع الاعداد الصحيحة المغايرة للمذكورة
موجبة كانت او سالبة يمكن بيانها بقانون $\hat{z} + \hat{z} = 1$ بفرض ان 1
عدد صحيح موجبا كان او سالبا و \hat{z} عدد صحيح موجب اصغر من ∞
فاذا فرض $k = \hat{z} + \hat{z}$ صار قانون (٥) هكذا

$$\text{جت} (\hat{z} + \frac{\hat{h} + \hat{z}\tau}{\hat{z}}) + 1 - \hat{z} \text{ جا } (\hat{z} + \frac{\hat{h} + \hat{z}\tau}{\hat{z}})$$

ويجذف الدوائر غير اللازمة يحدث

$$\text{جت} \frac{\hat{h} + \hat{z}\tau}{\hat{z}} + 1 - \hat{z} : \left(\frac{\hat{h} + \hat{z}\tau}{\hat{z}} \right)$$

وحيث ان \hat{z} عدد موجب $\hat{z} > 0$ يكون المقدار السابق محصورا بين
المقادير التي وجدت بفرض $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2$
 $0 < k = 1 - \hat{z}$

وبهذه المثابة يحصل للطرف الثاني من قانون (٢) ما يلزم من العموم
اذا اخذ فيه قوس \hat{h} بعينه مع اقواس $\hat{h} + \tau$ و $\hat{h} + 2\tau$ و
 $\hat{h} + 3\tau$ $\hat{h} + (1 - \hat{z})\tau$ ويجب ان يجري
في قانون (٣) ما ذكره فيقال قد وجد هذا القانون برفع

جت هـ + ٧ - ١ جاه الى درجة م و يأخذ جذر الحاصل المبين
بدرجة ٥ وقانون (١) المتعلق بالحالة التي فيها الاس عدد صحيح
موجب يفيد اولا

(جت هـ + ٧ - ١ جاه)^م = جت م هـ + ٧ - ١ جاه م وقانون
(٢) باخذ جذر الحاصل المبين بدرجة ٥ يفيد ثانيا

(جت هـ + ٧ - ١ جاه)^م = جت ^م/_٥ هـ + ٧ - ١ جا ^م/_٥

لكن لاجل ان يكون للطرف الثاني شمول كالاول يلزم بمقتضى ماوضح سابقا
وضع م هـ + ك ط بدل م هـ او وضع الاقواس م هـ و م هـ + ط
م هـ + ٢ ط م هـ + ٣ ط م هـ + (١ - ٥) ط بدل
هـ بالتوالي

ولذلك ربما بعض توضيحات فيما اذا اريد استعمال قانون (٣) في اخذ جذر
جت هـ + ٧ - ١ جاه المبين بدرجة ٥ ورفع هذا الجذر الى اس م
فبقول اذا كان كسر ^م/_٥ غير قابل للاختصار وكان كل من حديه عددا اوليا
مع الاخر امكن استعمال هذا القانون على حاله لانه متى كان عددا م و ٥
اوليين مع بعضهما ثبت بالجبر ان

(٧ - ١) = ٦ - م = ^٦/_٥ و اذا كان كسر ^م/_٥ قابلا للاختصار وكانت غاية
اختصاره كسر ^س/_ص ثبت ايضا ان (٧ - ١) = ٦ - م = ^٦/_٥ = ^ص/_س = ^٦/_٥
فحينئذ لا استعمال قانون (٣) يلزم قبل استعماله ان يحول كسر ^م/_٥ الى
اصغر حديه بان يكتب هكذا

(جت هـ + ٧ - ١ جاه)^ص = جت ^ص/_٥ هـ + ٧ - ١ جا ^ص/_٥

واذا بقي ^م/_٥ في القانون المذكور كان الطرف الاول مكافيا لجذر درجته
٥ فتكون له مقادير مختلفة بعدة ٥ مع انه لا يلزم ان يكون له مقادير

مختلفة الابعدة صه ولا حاجة الى ذكرانه يلزم ملاحظة + كط بعد
سهه كما تقدم نظير ذلك

(١٢٦)

ذا كان عددا م و د اوليين يوجد $\sqrt{m} = \sqrt{d}$ و هذا يرجع
لى ان اخذ الجذر والرفع الى الدرجة يمكن اجزاءهما فى اى ترتيب كان
فاذا اخذنا اولا جذر جت ه + $\sqrt{1 - \gamma}$ المميز بدرجة د بمقتضى
قانون (٢) ثم رفعناه الى درجة م بمقتضى قانون (١) نجد

$$\left(\sqrt{\text{جت ه} + \sqrt{1 - \gamma}} \right)^m = \text{جت}^m + \frac{m}{d} \sqrt{1 - \gamma} \text{ جا}^m \text{ د}$$

وحينئذ يلزم ان يلاحظ ان فى الطرف الثانى ه + كط
وبالعكس اى اذا ثبت رأب رفع جت ه + $\sqrt{1 - \gamma}$ جا ه الى درجة م
بواسطة قانون (١) ثم اخذ الجذر المدلول عليه بدرجة د بواسطة قانون
(٢) يحدث

$$\sqrt{\text{جت ه} + \sqrt{1 - \gamma}}^m = \text{جت}^m + \frac{m}{d} \sqrt{1 - \gamma} \text{ جا}^m \text{ د}$$

ويلزم فى هذا القانون ان يوضع م ه + كط بدل م ه فن ذلك يحدث
نتيجة ضرورية هى ان هاتين المعادلتين

$$\text{جت}^m + \frac{m}{d} \sqrt{1 - \gamma} \text{ جا}^m \text{ د} = \frac{m}{d} (\text{ه} + \text{كط})$$

$$\text{جت}^m + \frac{m}{d} \sqrt{1 - \gamma} \text{ جا}^m \text{ د} = \frac{m}{d} (\text{ه} + \text{كط})$$

اليتين فيما ك عدد صحيح يجب ان تكونامة كافيتين تكافيا تاما متى كان
م و د عددين اوليين وبالجملة فذلك يعلم بدون واسطة بمجرد وضع
 $1 = ك$ و $2 = ك$ و $3 = ك$ و $(1 - د) = ك$ على

التوالى وبالبرهنة على انه اذا قسم م^٢ و م^٣ م^{٠٠٠٠٠} (١-) م^٢
على ٥ تكون الفواصل التى توجد مختلفة

(١٢٧)

ما قدمناه يدل على ما يلزم من الاحتراسات فى استعمال قانون المعلم مواور
والعادة انه اذا كان الاس فيه عددا من كبا من كسر وصحيح كهذا م^٢
يفرض لاجل السهولة ان م و ٥ عددان اوليان وفى هذه الحالة
لا ينبغي ان يهمل اعتباران ه او م ه يلزم ان يزدادا بمضارب
مختلفة من المحيطات وهذه الملحوظة لازمة خصوصا فى قطرى المسئلة المعروفة
بالقطاعات المنزوية قال المؤلف بوانسون بعض المؤلفين اعدم التفاتهم اليهالم
يتصرفوا فى بعض اشكالات وجدت فى هذا الفرع من الهندسة التحليلية والذين
استخرجوا هذه الاشكالات لم يمكنهم حلها انتهى

فى قوانين تعيين جا ه و جت ه و (جاه) (جت ه) ٥

(١٢٨)

ولنرجع الى قانون مواور السابق فى بند (١٢٤) وهو

جت ٥ ه + ١ - جا ه = (جاه + ١ - جت ه) ٥ (١)
فاذا فرض فى هذا القانون ان ٥ عدد صحيح موجب فبوضع ه بدل
ه فيه يصير

جت ٥ ه - ١ - جا ه = (جت ه - ١ - جاه) ٥ (٢)

ويجمع هذه المعادلة الى سابقتها ثم طرحها منها لوجود هذان المقداران

جت ٥ ه = (جت ه + ١ - جاه) ٥ + (جت ه - ١ - جاه) ٥ (٣)

جا ٥ ه = (جت ه + ١ - جاه) ٥ + (جت ه - ١ - جاه) ٥ (٤)
١ - ٢

(١٢٩)

ويمكن اجراء قانون ذات الحدين على الدرجات وبمخذف الحدود التى تتماهى بوجود

$$\text{جت ه} = \text{جت ه} - \frac{(1-2)}{2 \times 1} \text{جت ه} - \text{جت ه} + \text{جت ه}^2$$

$$+ \frac{(1-2)(2-3)(3-4)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \text{جت ه} - \text{جت ه}^4 - \dots \text{الخ} (5)$$

$$\text{جا ه} = \frac{1}{1} \text{جت ه} - \text{جا ه} - \frac{(1-2)(2-3)}{3 \times 2 \times 1} \text{جت ه}$$

$$\text{ج ه} = \text{جت ه}^3 - \text{جت ه}^3 + \frac{(1-2)(2-3)(3-4)(4-5)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \text{جت ه} + \dots$$

$$(6) \text{جت ه}^5 - \text{جت ه}^5 - \dots \text{الخ} (7)$$

وهذان القانونان يبينان جيب مضروب ه وجيب تمامه بمعرفة جيب تمام القوس الاصلى وجيبه وقوانين الحدود الاصلية ظاهرة فيه ويلزم ان تمتد الى ان يساوى الحد الاخير صفر كما في القانون الذى هو مأخوذة منه ويمكن الوصول الى هذين القانونين بواسطة معادلة (١) لان مسطح الطرف الثانى يشتمل على جزء حقيقى وجزء يعتبره ١ - ٢ ولاجل ابقاء المعادلة على حالها يلزم ان تكون الاجزاء الحقيقية فى الطرفين متساوية والاجزاء التخيلية كذلك وبهذه الكيفية يوجد القانونان السابقان

(١٣٠)

كثيرا ما يحتاج فى العمليات الرياضية العالية الى تعيين (جا ه) و (جت ه) بمعرفة جيوب وجيوب تمام الاقواس التى هى مضارب وكيفية الوصول الى ذلك حين يكون ه عددا صحيحا موجبا وهى الحالة المعتادة ان يوضع

$$\text{جت ه} + ١ - ٢ \text{ جا ه} = \text{صه} \text{ و جت ه} - ١ - ٢ \text{ جا ه} = \text{سه} \text{ فيحدث}$$

$$٢ \text{ جت ه} = \text{سه} + \text{صه} \text{ و } ٢ - ١ - ٢ \text{ جا ه} = \text{صه} - \text{سه}$$

$$\text{فيكون } ٢ \text{ (جت ه)} = (\text{سه} + \text{صه}) \text{ و } (٢ - ١ - ٢ \text{ جا ه})$$

$$= (\text{صه} - \text{سه}) \text{ و بتسطح القوى يكون}$$

وايضاً ان اسوس حاصل صه سه تساوى ١
لانه يوجد.

$$\text{صه سه} = (\text{جت ه} + \overline{١ - \gamma}) (\text{جت ه} - \overline{١ - \gamma}) = \text{جت ه} + \text{جا ه} = ١$$

وبالبناء على هذه التنبهات يختصر مقدار $\frac{2}{r}$ (جت ه) $\frac{2}{r}$ فبتقسيم
الحدود كلها على ٢ يحدث

$$\frac{1-2}{2} (\text{جت ه}) = \text{جت ه} + \frac{2}{1} (\text{جت ه} - 2) + \frac{2}{2 \times 1} (1-2)$$

$$\text{جت ه} (2-4) + \dots + \frac{2(1-2)(2-2) \dots (2+2)}{2 \times 2 \times 1 \dots 2} \text{جت ه} (9)$$

ونفرض ثانياً ان كمية ٢ عدد زوج مثل ٢م فيكون عدد حدود قانون
(٧) $١ + ٢م$ واذا حملنا الحد المتوسط الى جزئين كل منهما يساوى نصف
الحد المذكور يوجد باختصار كالسابق

$$\frac{1-2}{2} (\text{جت ه}) = \text{جت ه} + \frac{2}{1} (\text{جت ه} - 2) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{2(1-2)(2-2) \dots (2+2)}{2 \times 1} \text{جت ه} (4-2) + \dots$$

$$(10) \quad \frac{1}{2} + \frac{2(1-2)(2-2) \dots (2+2)}{2 \times 2 \times 1 \dots 2}$$

ولنعبر الآن قانون (٨) فتكون الحدود ممتزاة على التناوب بغلامتى
+ و - بحيث انه اذا كان عدد ٢ فرداً مثل $١ + ٢م$ يكون
للحدود المتساوية الابعاد من المتطرفة مكررات متساوية باشارات مختلفة
وبنبنى على ذلك انه بالبرهنة على ما هنا كما تقدم فى مثل هذه الصورة من قانون
(٧) يوجد بسهولة

وجيب تمامه ولا بد ان يلاحظ في القانونين الاخيرين ان الحد التخييلي الذي هو ١-٢ اذا رفع الى اس زوج افاد مضروبا حقيقيا يساوي ١ + او ١- بحسب كون م عددا زوجا او فردا ويلزم ان ننبه ايضا لاجل تسهيل الحسابات على ائنا اذا اتبعنا القاعدة المبينة في الحدود الاول يجب ان نقف اذا وجدنا قوسا سالبا ماثقتين الى ان لا نأخذ الانصف الحد الاخير اذا اشتمل على قوس يساوي صفرا

تحويل الجيب وجيب التمام الى متسلسلات

(١٣١)

ولنذكر كيفية استخراج المهندس اولير للمتسلسلات المبينة للجيب وجيب التمام بواسطة معرفة القوس من قانوني (٥) و (٦) السابقين في بند (١٢٩) فنقول يمكن التصرف في ه بحيث يكون ه مساويا قوسا ما سـ بابقاء ه عددا صحيحا فيمكن ان يوضع حينئذ ه = سـ فيحدث ه = سـ

وحينئذ يمكن كتابة قانوني (٥) و (٦) هكذا

$$\text{جت س} = (\text{جت ه})^{\frac{1}{2}} - \text{س} \frac{(\text{س} - \text{ه})}{2 \times 1} (\text{جت ه})^{\frac{3}{2}} + \frac{(\text{جاه})^2}{\text{ه}}$$

$$\text{س} (\text{س} - \text{ه}) (\text{س} - \text{ه}^2) (\text{س} - \text{ه}^3) (\text{جت ه})^{\frac{5}{2}} - \frac{(\text{جاه})^4}{\text{ه}} (\text{جت ه})^{\frac{3}{2}} - \frac{\text{الخ} (١)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\text{جاس} = \frac{(\text{جت ه})^{\frac{1}{2}} (\text{جاه})^{\frac{1}{2}} - \text{س} (\text{س} - \text{ه}) (\text{س} - \text{ه}^2) (\text{س} - \text{ه}^3)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$(\text{جت ه})^{\frac{3}{2}} \frac{(\text{جاه})^{\frac{3}{2}}}{\text{ه}}$$

$$+ \text{س} \frac{(\text{س} - \text{ه}) (\text{س} - \text{ه}^2) (\text{س} - \text{ه}^3) (\text{س} - \text{ه}^4)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$(\text{جت ه})^{\frac{5}{2}} \frac{(\text{جاه})^{\frac{5}{2}}}{\text{ه}} - \frac{\text{الخ} (٢)}{\text{ه}}$$

فإذا توهمنا ان ه يتناقض على التوالي الى ان يصير صفرا الزم ان عدد ه
يزداد الى غير نهاية وحيث لا يبقى في القانونين السابقين لا ه ولا ه
بل لا يوجد فيهما الا قوس ه وهذا ما يقع للقانونين اللذين يكون المقصود
منهما تبدين جيب قوس وجيب تمامه بمعرفة ذلك القوس فحين يصير ه صفرا
يحدث جت ه = ١ وايضا $\frac{\text{جاه}}{\text{ه}} = ١$ كما في (٥١) وانفرض ان

اسوس جت ه و $\frac{\text{جاه}}{\text{ه}} = ١$ بالغة ما بلغت الاسوس في العظم
فيصير القانونان السابقان هكذا

$$\text{جت ه} = ١ - \frac{\text{س}^٢}{٢ \times ١} + \frac{\text{س}^٤}{٤ \times ٢ \times ٢ \times ١} - \frac{\text{س}^٦}{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

+ الخ (٣)

$$\text{جاس} = \text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣ \times ٢ \times ١} + \frac{\text{س}^٥}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} - \frac{\text{س}^٧}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$$+ \text{الخ (٤)}$$

وحيث ان عدد ه صار لانها تيسر لا تنتهي حدود المتسلسلات لكنهما قابلة
لان تفيد مقادير الجيب وجيب التمام تقريبا خصوصا اذا كان قوس
س ه كسرا صغيرا جدا وهذه الحالة هي التي يستعملها المهندسون

(١٣٢)

ومن البدهي الظاهر من اول وهله ان جميع اسوس جت ه و $\frac{\text{جاه}}{\text{ه}}$

يجب ان تفيد الواحد حين يتناقض ه حتى يصير صفرا كما فرضناه ولكن
اذا تأمل ادنى تأمل يشاهد هنا اشكال ينبغي الالتفات الى حله ولاجل
تسهيل فهمه نعتبر الاشياء على بعد

فنفرض ان صه و سه في مقدار $\frac{\text{سه}}{\text{صه}}$ كمية ان متغيرتان لاتعلق
 لاحدهما بالآخرى فاذا جعل سه مقدارا موجبا ثابتا وزيد مقدار
 صه من صفر الى واحد بالدرج تزداد كمية $\frac{\text{سه}}{\text{صه}}$ ايضا من صفر الى واحد
 واذا فرض ان صه ثابتة الا انها > 1 وان سه ذات مقادير عظيمة
 جدا تكون كمية $\frac{\text{سه}}{\text{صه}}$ صغيرة جدا ووحدها المقابل لمعادلة $\text{صه} = +$ لا
 يكون صفرا

ولنفرض الان ان صه يزداد من صفر الى واحد وقت ان يفرض ازدياد
 سه ايضا الى $+$ لا فاذا لم يوجد ادى نسبة بين صه و سه يمكن ان
 يتوهم دأتمان بين هاتين الكميتين المتغيرتين ارتباط بحيث تكون نهاية سه
 المقابلة لمقدار $\text{صه} = 1$ و $\text{سه} = +$ لا اما صفر او واحد او كمية غيرهما
 محصورة بين صفر والواحد بمعنى ان سه تكون ذات مقادير غير منتهية
 حقيقة

اكن اذا كان الاس يعكس ذلك بان كان لكل من سه و صه
 المتغيرتين تعلق ببعضهما يفرض مثلا ان المتغيرتين دالة كمية واحدة صغيرة
 ط و كمية ط هي التي تجعل صه تزداد الى الواحد كما تجعل سه
 تزداد الى $+$ لا فيلزم حينئذ الالتفات الى كيفية نوازن الازدياد الذي يميل
 ازدياد صه لان يحدثه في مقدار $\frac{\text{سه}}{\text{صه}}$ مع التناقص الذي يميل ازدياد
 سه لان يحدثه فيه او يقال ان اللازم اقل ما فيه معرفة الحد الذي يميل اليه
 مقدار $\frac{\text{سه}}{\text{صه}}$ على حسب تركيب صه و سه لدلالة ط فهم اذا هو
 الاشكال الذي يحصل في الانتقال من قانون (١) و (٢) الى المتسلسلتين
 (٣) و (٤)

والمتغيرتان هـ هـ و المرتبطتان ببعضهما بنسبة $\text{هـ} = \text{سه}$
 التي تستلزم ان حاصل الضرب هـ يكون دأئما مساويا للقوس ما معلوم
 سه بحيث كان قانونا (١) و (٢) يشتملان على مقادير
 (جت هـ) و (جت هـ) التي يلزم ان يفرض فيها كلها

$$(1-h^2) \frac{2^2}{2 \times 1} + \frac{2^2}{1} - 1 = 2^2 (1-h^2)$$

$$2^2 \frac{(1-2^2)(1-2^2)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{2^2}{1} - 1 = 2^2 (1-h^2)$$

$$\frac{2^2}{1} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^2}{3} \right) - \frac{2^2}{1} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^2}{3} \right) + \frac{2^2}{1} = 2^2 (1-h^2)$$

ولاجل الحصول على فرض $h=0$ يمكن ان يتبدء بفرض h صغيرة جدا فينتد يتضح ان حدود المتسلسلة السابقة تنقص بالتدريج وحيث كانت تارة موجبة وسالبة اخرى فاذا اقتصرنا على الحدين الاولين ينتج حاصل صغير جدا فيكون $(1-h^2) < 1-2^2$ وبالضرورة يكون

$$1-2^2 < 1-h^2$$

واذا فرضنا $h=0$ يصير هذا الجذر ١ ويصير h حد و فكمية و لا يمكن ان تكون $1 >$ على ان دالة f حيث كانت حاصل المضروبين اللذين لا يمكن ان يكونا $1 <$ لا يمكن ان يصير حد و $1 <$ ايضا فيكون $1=$ وحينئذ يكون الحد العمومي (٥) للمتسلسلات التي تبين جت h

$$و جاسه هكذا $\pm \frac{2^2}{3 \times 2 \times 1} \dots$$$

وبفرض $h=0$ و $2^2=2$ و $4^2=4$ وهكذا الى تغير الاشارات يتوصل الى حدود متسلسلة (٣) و (٤) المبرهن عليهما مع غاية الضبط

١٣٣

حل المعادلات ذات الحدين بواسطة

الجداول ونظرية المهندس قوطس

اذا فرض ان المطلوب حل المعادلة ذات الحدين $h^2 = \pm$ يرمز بحرف h الى واحد من جذور h التي عددها h وبفرض ان $h^2 = \pm$ فتصير المعادلات ذات الحدين $h^2 = \pm$

فنعبر اولاً الحالة الاولى منها التي هي

$$\text{س} = ١ + (١)$$

فاذا وضعنا س = جت هـ + ١ - جا هـ يحدث لنا من قانون
مواور

$$\text{س} = \text{جت هـ} + ١ - \text{جا هـ}$$

وحينئذ نجمع مقادير هـ المعينة من هذه المساوية

$$\text{جت هـ} + ١ - \text{جا هـ} = ١ +$$

نحدث مقادير س التي هي جذور معادلة (١) وبكفي في الاستعمال

الذي تستعمله هنا ان قانون مواور ثابت للاسوس الصحيحة الموجبة

ولاجل التوفيق بهذه المساوية الاخيرة يلزم ان يعدم الجزء التخيلي

١ - جا هـ فينتج من ذلك ان هـ احد مضارب نصف محيط الدائرة

ثم يلزم ان يفرض جت هـ = ١ وهذا يستلزم ان هـ احد المضارب

الزوجية لنصف المحيط فاذا رمزنا بحرف ط الى نصف محيط الدائرة والى

اي عدد زوج بهذا الرمز ٢ ك يلزم ان يحدث

$$\text{هـ} = \frac{\text{ط}^٢}{٢} \text{ ومنه يؤخذ هـ} = \frac{\text{ط}^٢}{٢}$$

وعليه ينبغي

$$\text{س} = \text{جت} \frac{\text{ط}^٢}{٢} + ١ - \text{جا} \frac{\text{ط}^٢}{٢}$$

فاذا وضعنا في كل المحال اشارة - امام ١ - جا لا يتغير البرهان

وحينئذ نحدث جذور معادلة س = ١ باخذ مقادير س المحصورة

في قانون

$$\text{س} = \text{جت} \frac{\text{ط}^٢}{٢} \pm ١ - \text{جا} \frac{\text{ط}^٢}{٢} \quad (١)$$

فجذور معادلة (١) عددها (٢) ومن المعلوم ان هذه الجذور كلها

$$(1-h^2) = 1 - \frac{h^2}{1} + \frac{h^2(1-h^2)}{2 \times 1} - \frac{h^4}{4}$$

$$h^2 \frac{(1-h^2)(2-h^2)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{h^6}{6} - 1 = \frac{h^2}{1} - 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^6}{6}$$

$$\frac{h^2}{1} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^6}{6} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{h^6}{6} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^6}{6} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^6}{6}$$

ولاجل الحصول على فرض $h=0$ يمكن ان يتبدء بفرض h صغيرة جدا فينتد يتضح ان حدود المتسلسلة السابقة تنقص بالتدريج وحيث كانت تارة موجبة وسالبة اخرى فاذا اقتصرنا على الحدين الاولين ينتج حاصل صغير جدا فيكون $(1-h^2) < 1-h^2$ وبالضرورة يكون

$$1-h^2 < 1-h^2$$

واذا فرضنا $h=0$ يصير هذا الجذر 1 و يصير 1 حد و فكمية و لا يمكن ان تكون $1 >$ على ان دالة 1 حيث كانت حاصل المضروبين اللذين لا يمكن ان يكونا $1 <$ لا يمكن ان يصير حد و $1 <$ ايضا فيكون $1=0$ وحيث يكون الحد العمومي (0) للمتسلسلات التي تبين جت h

$$و جاسه هكذا $\pm \frac{h^2}{3 \times 2 \times 1} \pm \frac{h^4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \pm \frac{h^6}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \pm \dots$$$

وبفرض $h=0$ و $h^2=0$ و $h^4=0$ و $h^6=0$ وهكذا مع الالتفات الى تغيير الاشارات يتوصل الى حدود متسلسلة (3) و (4) المبرهن عليهما مع غاية الضبط

١٣٣

حل المعادلات ذات الحدين بواسطة

الجداول ونظرية المهندس قوطس

اذا فرض ان المطلوب حل المعادلة ذات الحدين $h^2 = \pm h$ يرمز بحرف h الى واحد من جذور h التي عددها 2 ويفرض ان $h = \pm h$ فتصير المعادلات ذات الحدين $h^2 = \pm h$

فنعتبر اول الاحالة الاولى منها التي هي

$$\text{س} = ١ + \text{هـ} \quad (١)$$

فاذا وضعنا س = جت هـ + ١ - ٧ جا هـ يحدث لنا من قانون
مواور

$$\text{س} = \text{جت هـ} + ١ - ٧ جا هـ$$

وحينئذ نجمع مقادير هـ المعينة من هذه المساوية

$$\text{جت هـ} + ١ - ٧ جا هـ = ١ + \text{هـ}$$

فحدث مقادير س التي هي جذور معادلة (١) ويكفي في الاستعمال

الذي تستعمله هنا ان قانون مواور ثابت للاسوم الصحيحة الموجبة

ولا جل التوفية بهذه المساوية الاخيرة يلزم ان يعدم الجزء التخيلي

١ - ٧ جا هـ فينتج من ذلك ان هـ احد مضارب نصف محيط الدائرة

ثم يلزم ان يفرض جت هـ = ١ وهذا يستلزم ان هـ احد المضارب

الزوجية لنصف المحيط فاذا رمزنا بحرف ط الى نصف محيط الدائرة والى

اي عدد زوج بهذا الرمز ك يلزم ان يحدث

$$\text{هـ} = \frac{\text{ك ط}}{\text{د}} \quad \text{ومنه يؤخذ} \quad \text{هـ} = \frac{\text{ك ط}}{\text{د}}$$

وعليه ينبني

$$\text{س} = \text{جت} \frac{\text{ك ط}}{\text{د}} + ١ - ٧ جا \frac{\text{ك ط}}{\text{د}}$$

فاذا وضعنا في كل المحال اشارة - امام ١ - ٧ لا يتغير البرهان

وحينئذ تحدث جذور معادلة $\text{س} = ١$ باخذ مقادير س المحصورة

في قانون

$$\text{س} = \text{جت} \frac{\text{ك ط}}{\text{د}} \pm ١ - ٧ جا \frac{\text{ك ط}}{\text{د}} \quad (١)$$

فجذور معادلة (١) عددها (د) ومن المعلوم ان هذه الجذور كلها

غير متساوية وحيث كان يمكن في القانون السابق ان نجعل الكمية
جميع المقادير الصحيحة موجبة كانت اوسالمة نبرهن على انه يمكن بهذه المثابة
معرفة مقادير مختلفة لمجموع s عددها \leq ولا يمكن اكثر من ذلك
وهذه المقادير التي عددها \leq تؤول الى جذور معادلة (١) التي
جذورها \leq ايضا ولنبرهن على ما ذكره فنقول

اولا لافائدة في اعطاء تلك مقادير سالبة لانه بوضع $-k$ بدل k يتغير
احد مقادير قانون (١) بالآخر

وثانيا لافائدة ايضا في فرض $k=1$ و $k \leq$ لانه يمكن ان يطرح
من k اعظم مضارب \leq وذلك يرجع الى طرح محيط الدائرة مرة

او مرات من قوس $\frac{2k}{\leq}$ وذلك لا يغير الجيب ولا تمام الجيب

وثالثا اذا اعتبرنا بين \cdot و \leq ان عددي k و $-k$ على بعد واحد
من \cdot و \leq تكون مقادير s المقابلة لها متساوية لانه اذا فرض
ان $k = -k$ يحدث

$$s = \frac{(k-1)^2}{\leq} \pm \frac{(k-1)^2}{\leq} \text{ جا } 1 - \gamma$$

$$s = - \frac{(k-1)^2}{\leq} \pm \frac{(k-1)^2}{\leq} \text{ جا } 1 - \gamma$$

$$s = \frac{(k-1)^2}{\leq} \pm \frac{(k-1)^2}{\leq} \text{ جا } 1 - \gamma$$

وهذه المقادير عين المقادير المقابلة $k = k$ فقد ثبت انه لافائدة في جعل
مقادير $\frac{1}{4}$ لكمية k وحينئذ لو فرضنا \leq عددا فردا $2l+1$ او عددا
زوجا $2l-1$ يمكن ان يقتصر على جعل مقادير

$k=0$ و $k=1$ و $k=2$ $k=l$ بدل k

ولم يبق علينا الا البرهنة على ان قانون (١) يعطى جذور معادلة (١)

بالكيفية السابقة وهذا ما نشعر فيه فنقول
لو كانت صورة المعادلة $\sqrt{1} = 1$ لصار قانون (١) هكذا

$$س = جت \frac{\sqrt{1} \pm \sqrt{1}}{1} \text{ جا } \frac{\sqrt{1}}{1}$$

فلاجل العددين المتطرفين $\sqrt{1} = 0$ و $\sqrt{1} = 1$ يوجد $س = 1 + 1$ و
 $س = 1 - 1$ ولاجل الاعداد المتوسطة ١ ٢ ٣ لـ ١
يوجد القوس منحصرا بين ٠ و ١٨٠ فينتدلا يصير الجيب المضروب
في $\sqrt{1} \pm \sqrt{1}$ صفرا وحينئذ تكون مقادير $س$ تخيلية وما عدا ذلك يقال
لاشئ من هذه المقادير الاخيرة يتكرر لان الجذر التخيلي $\sqrt{1} \pm \sqrt{1}$ اشارات
مختلفة في الجذرين الزوجين اللذين من جملة ازدواج واحد اعني اللذين يحدثان
من مقدار واحد $\sqrt{1}$ والاجزاء الحقيقية تختلف في الازدواج الحاصلة من
مقادير $\sqrt{1}$ المختلفة نظرا لكونها جيوب تمام اقواس تتزايد من ٠ الى
١٨٠ فاذا جعنا مقداري $1 + 1$ و $1 - 1$ الحقيقيين الى هذه المقادير
التخيلية التي عددها $1 - 1$ يكون المجموع $1 - 1$ وهو جذر معادلة
 $\sqrt{1} = 1$ كما يلزم ان يكون كذلك

اما لو كانت صورة معادلة (١) هكذا $\sqrt{1} = 1$ لصار قانون (١)
هكذا

$$س = جت \frac{\sqrt{1} \pm \sqrt{1}}{1 + 1} \text{ جا } \frac{\sqrt{1}}{1 + 1}$$

وفي هذه الحالة لا يوجد الاجزاء واحد حقيقي $س = 1 + 1$ يقابل $\sqrt{1} = 0$
وما عداه من الجذور تخيلي على ان من الواضح ان عدد مجموع الجذور يساوي
المعامل الذي هو $1 + 1$

ولنعبر بمعادلة $\sqrt{1} = 1$ (٢)
فاذا وضعنا

$$س = جت \sqrt{1} \pm \sqrt{1} \text{ جا } \sqrt{1}$$

حدث $\text{س} = \text{ج} \text{د} \text{ه} + \gamma - 1$ جا $\text{د} \text{ه}$ فيوجد حينئذ لكمية س
مقادير جذور معادلة (٢) بتعيين ه بهذا الشرط

$$\text{ج} \text{د} \text{ه} \pm \gamma - 1 = \text{جا} \text{د} \text{ه} = 1$$

فعلي هذا يوجد جا $\text{د} \text{ه} = 0$ و $\text{ج} \text{د} \text{ه} = 1$ كل على حدته
ومن ذلك ينتج ان قوس $\text{د} \text{ه}$ يلزم ان يكون مضروباً بفردا الكمية ط
وبهذا السبب يفرض

ومنه يؤخذ

$$\text{د} \text{ه} = (1 + \kappa^2) \text{ط}$$

فيحدث

$$\frac{\text{ط}(1 + \kappa^2)}{\text{د}} = \text{ه}$$

$$\text{س} = \text{ج} \text{د} \text{ه} \pm \frac{\text{ط}(1 + \kappa^2)}{\text{د}} - \gamma - 1 \text{ جا} \frac{\text{ط}(1 + \kappa^2)}{\text{د}} \quad (\text{ب})$$

ولانأخذ المضارب السالبة لكمية ط لانها تكون عين مقادير س
فيما لو كانت هذه المضارب موجبة ولانأخذ ايضا $\kappa < \text{د}$ بل ولا
 $\kappa = \text{د}$ لانالوطر حنا من κ مضروب د المشتك عليه لنقص قوس
 $\frac{\text{ط}(1 + \kappa^2)}{\text{د}}$ مرة كاملة من المحيطات او مررات وذلك لا يغير مقادير

معادلة (ب) مقدار $\kappa = 1 - \text{د}$ يفيد

$$\text{س} = \text{ج} \text{د} \text{ه} \pm \frac{\text{ط}(1 - \text{د}^2)}{\text{د}} - \gamma - 1 \text{ جا} \frac{\text{ط}(1 - \text{د}^2)}{\text{د}} =$$

$$\text{ج} \text{د} \text{ه} - \frac{\text{ط}}{\text{د}} \pm \gamma - 1 \text{ جا} \frac{\text{ط}}{\text{د}} = \text{ج} \text{د} \text{ه} \pm \frac{\text{ط}}{\text{د}} - \gamma - 1 \text{ جا} \frac{\text{ط}}{\text{د}}$$

وهذه المقادير عين المقادير التي توجد بفرض $\kappa = 0$ فعلى كل حال مقادير
 κ المتساوية الابعاد من 0 و $1 - \text{د}$ تفيد عين مقادير س

لانه اذا وضع $\kappa = 1 - \text{د}$ ك يحدث

$$\text{س} = \text{ج} \text{د} \text{ه} \pm \frac{\text{ط}(1 - \kappa^2 - \text{د}^2)}{\text{د}} - \gamma - 1 \text{ جا} \frac{\text{ط}(1 - \kappa^2 - \text{د}^2)}{\text{د}}$$

$$= \text{ج} \text{د} \text{ه} \pm \frac{\text{ط}(1 + \kappa^2)}{\text{د}} - \gamma - 1 \text{ جا} \frac{\text{ط}(1 + \kappa^2)}{\text{د}}$$

وهذا الحاصل عين الحاصل فيما اذا فرض ان $k = 1$ من ذلك ينتج ان جميع
مقادير s توجد باعطاء k مقادير لا تزيد عن $(1 - s)$ فحينئذ
اذا كان $s = 0$ عددا زوجا 2 يلزم ان يفرض $k = 0$ و $k = 1$
و $k = 2 \dots \dots \dots k = 1 - 1$ واذا كان $s = 0$ عددا فردا $1 + 2$
يلزم ان يفرض $k = 0$ و $k = 2 \dots \dots \dots k = 1$

وفي صورة ما اذا كانت $s = 2$ تكون المعادلة المطلوب حلها $s = 1 - 1$
واعداد $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2 \dots \dots \dots k = 1 - 1$
تفيد في معادلة $(-)$ الاقواس التصاعدية

$$\frac{ط}{12} \text{ و } \frac{ط^3}{12} \text{ و } \frac{ط^5}{12} \dots \dots \dots \frac{ط(1-12)}{12}$$

وهذه الاقواس جميعها منحصرة بين صفر وط وحينئذ لا يساوى جيب
واحد منها صفر او جيب تماماتها كلها غير متساوية فكل قوس يفيد
مجموع s مقدارين تخيليين ~~كل~~ منها ما يختلف عن الآخر بـ s
ولا يمكن تكررها فيكون المقدار s مقادير مختلفة عددها
 2

وفي صورة ما اذا كان $s = 1 + 2$ تكون المعادلة المطلوب حلها
 $s = 1 + 2$ والاعداد التي هي $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2 \dots \dots \dots$
تغير في معادلة $(ب)$ اقواس

$$\frac{ط}{1+12} \text{ و } \frac{ط^3}{1+12} \dots \dots \dots \frac{ط(1+12)}{1+12} \text{ او } \frac{ط}{1+12}$$

حيث كان القوس الاخير المساوى ط يفيد $s = 1$ ويكون المقدار
 s في كل من الاقواس الباقية مقداران تخيليان ولا صعوبة في مشاهدة
انه لا شئ من هذه المقادير يتكرر فقد ثبت ان s لها مقادير عددها
 $1 + 2$

إذا عرفت جذور معادلتى $\bar{s} = 1 +$ و $\bar{s} = 1 -$ سهل عليك تكوين القواسم الحقيقية التى بدرجة ثانية لكميتى $\bar{s} = 1 -$ و $\bar{s} = 1 +$ ذاتى الحدين

وبيان ذلك اولاً ان قانون (أ) يفيد ذات الحدين $\bar{s} = 1 -$ فى المضارب التى بدرجة اولى مقدارين

$$\begin{aligned} \bar{s} = 1 - \text{جـ} \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} + \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} - 1 \text{جـ} \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} \\ \bar{s} = 1 - \text{جـ} \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} + \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} - 1 \text{جـ} \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} \end{aligned}$$

وبضربهم فى بعضهم ما يحدث

$$\bar{s}^2 - \bar{s}^2 \text{جـ} \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}} + 1 \quad (\text{أ})$$

وهذا القانون يشتمل على جميع القواسم الحقيقية بدرجة ثانية لذات الحدين $\bar{s} = 1 -$ ولاجل استخراجهم منه يكفى ان نوضع الاعداد الصحيحة من ابتداء الصفر الى $\frac{1}{\bar{s}}$ بدلا من ك وبمثل ما تقدم يمكن ان يوجد للقواسم بدرجة ثانية لذات الحدين $\bar{s} = 1 +$ هذا القانون

$$\bar{s}^2 - \bar{s}^2 \text{جـ} \frac{(1 + \bar{s})}{\bar{s}} + 1 \quad (\text{ب})$$

ويلزم فى هذا القانون ابدال ك بالاعداد الصحيحة الموجبة من ابتداء

$$ك = 0 \text{ الى عدد } \frac{1}{\bar{s}} (1 - \bar{s})$$

وحيت كان قانونا (أ) و (ب) مشتملين على الجذور الحقيقية لمعادلتى $\bar{s} = 1 -$ و $\bar{s} = 1 +$ ينتج ان القانونين الاخيرين يشتملان على المضارب الحقيقية بدرجة اولى لذاتى الحدين

$$\bar{s} = 1 - \bar{s} = 1 +$$

لكن لا بد من التنبيه على ان القواسم في هذين القانونين مرفوعة لدرجة التربيع
فاذا فرض مثلاً ان $k = 0$ في قانون (أ) يصير هذا القانون $s^2 - s - 1$

أو (س-١) لكن لا يؤخذ الا $s = 1$

دعوى المهندس قوطس النظرية

(١٣٥)

لاجل وضع هذه الدعوى يتنبه الى انه اذا اعطيت k في قانون (أ) جميع
المقادير $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2 \dots \dots \dots$ الى $k = 2$ او ضربت
ذات الثلاثة حدود الناتجة من هذه المقادير كل منها في الآخر حدث
كما هو واضح حاصل فيه جميع المضارب $s^2 - 1$ مرتفعة الى درجة التربيع
وحينئذ يكون هذا الحاصل مساوياً (س-١) وكذلك اذا اعطيت k
في قانون (ب) جميع المقادير $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2 \dots \dots \dots$
الى $k = 2$ الحاصل ضرب جميع الثلاثة حدود يساوى (س+١)
اذا تقرر هذا فاقسم محيطاً ما الى اقسام متساوية عددها ٢ و ٣ واشترى الى
نقط التقسيم بنقرة ٠ و ١ و ٢ و ٣ الخ ثم ارسم من نقطة ٠ بجعلها
اصلاً نصف قطر يمتد خلف هذه النقطة اذا كان ذلك ضرورياً ثم ضع نقطة على
نصف القطر من جهة نقطة ٠ على بعد ما s من المركز ثم مد
خطوطاً مستقيمة الى جميع نقط التقسيم

وحينئذ يجعل نصف القطر هو الواحد ويرمز بحرف s الى خط ما من هذه
الخطوط المستقيمة وانظر المثلث الحادث منه مع الخطين اللذين يلتقيان بنهايته
في المركز فان التقي هذا الخط بنقطة تقسيم من عدد زوج $2k$ فالقوس
المحصور بين هذا التقسيم والنقطة الاصلية ٠ يكون

$$\frac{s^2}{2} \times 2k \leq 1 \text{ او } \frac{2k s^2}{2}$$

فيشاهد بسهولة بواسطة المثلث انه يحدث

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

وإذا كان خط \mathcal{C} ملتقياً بنقطة من عدد زوج $2k+1$ يحدث

$$1 + \frac{(p+kr)}{2} \text{ مه جت} - 2 \text{ مه} = 2 \text{ مه}$$

ويوضع اعداد ٠ و ١ و ٢ الى ٥- عوضا عن ك
في ذاتي الثلاثة حدود على التعاقب يحدث من الاولى مربعات المستقيمات
الواصله الى نقط التقسيم الزوجية ومن الثانية مربعات المستقيمات المنهية
بنقط التقسيم الفردية وحيث ان ذاتي الثلاثة حدود المذكورتين
عين ذاتي الحدين (أ) و (ب) يمكن ان ينتج من ذلك على حسب ما ذكرناه
انما الدعوى النظرية التي استكشفها المهندس قوطس وهي ان حاصل ضرب
جميع الخطوط الواصلة الى نقط التقسيم الزوجية من محيط الدائرة يساوي
فاضل س-١ وحاصل ضرب جميع الخطوط الواصلة الى نقط التقسيم
الفردية يساوي مجموع س+١

حل المعادلات التي بدرجة ثالثة

بواسطة الجداول

(157)

المعادلة التي بدرجة ثالثة فنحول صورتها الى هذه

$$s^2 + s + k = 0$$

وقد ثبت في الحبران مقادير سر الثلاثة داخله في قانون

$$\frac{r_J + r_S \gamma - s - \gamma}{r_J + r_S \gamma - \gamma + s - \gamma} = s$$

وحيث كانت المقادير المعكورة لجذري التكعيب تجعل هذه الكمية تسعة مقادير يلزم ان يتذكر انه اذا رمز الى الجزء الاول من الجذرين المذكورين بحرف α والى الثاني بحرف β لا يلزم جعل الاشتراك الا بين α و β

حيث ان $\gamma = \delta - \epsilon$ فهذه الكيفية يمكن ابعاد جميع المقادير الاجنبية
بوضع

$$\sqrt[3]{\gamma^3 - \gamma^2 \epsilon + \gamma \epsilon^2 - \epsilon^3} = \gamma - \epsilon \quad \text{و} \quad \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{\delta}{\epsilon} - \frac{\delta}{\gamma}$$

(١٣٧)

منى كان $\epsilon^3 + \gamma^3$ كمية سالبة فالمقادير السالبة العمومية لكمية δ
تكون صعبة الوضع بسبب المقادير التخيلية وحيث ثبت في الجبر في حال فرض
 $\epsilon^3 + \gamma^3 > 0$ ان جذور المعادلة الثلاثة حقيقية يظهر ان الحسابات
لا بد وان تؤدي الى طرق تختصر بها المقادير التخيلية ولكن في الحقيقة لا يتأتى
ذلك الا اذا استعملت المتسلسلات اللانهائية ولهذه الصعوبة التي مررت
الجبريين على العمل سميت الحالة التي نحن بصدد ها الحالة غير القابلة للاختصار
وانما تثبت الصعوبة من كون جذرى التكعيب الداخلين في كمية δ
العمومية لا يمكن استخراجهما بحيث يكون الجذر الحقيقي منفردا عن الجذر
التخيلي الا في احوال مخصوصة وبمقتضى قانون مواري يحصل هذا الانفراد

في مقادير صورة $\sqrt[3]{\gamma^3 - \gamma^2 \epsilon + \gamma \epsilon^2 - \epsilon^3}$ جت هـ + $\gamma - \epsilon$ جاه ولاجل ذلك نشرع

في تحويل جذرى التكعيب الى الصورة المتقدمة فنقول

حيث كان $\epsilon^3 + \gamma^3 > 0$ تكون δ سلبية وبوضع $\delta = -\epsilon \gamma$ عوضا عن
 δ تكتب المعادلة هكذا

$$\delta^3 - \gamma^3 \delta + \gamma^3 = 0 \quad (١)$$

وحينئذ تحدث $\epsilon^3 - \gamma^3 > 0$ او $\epsilon^3 > \gamma^3$ فمقادير δ تعلم
من قانون

$$\sqrt[3]{\gamma^3 - \gamma^2 \epsilon + \gamma \epsilon^2 - \epsilon^3} = \gamma - \epsilon$$

ومقادير δ تعلم من قانون

$$\delta = \frac{\gamma}{\epsilon} + \epsilon = \frac{\gamma}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{\gamma} \right)$$

الذى فيه يلزم وضع جميع مقادير γ المختلفة ومتى ثبت ذلك حدث من مقدار
 γ العمومى

$$\frac{\gamma^3 - \gamma + \frac{\gamma^2}{\gamma} - 1}{1 - \gamma} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

وحيث فرض ان $\gamma^2 > 1$ اممكن تعيين قوس γ بواسطة
 معادلة

$$\gamma^2 - \gamma = 1$$

فتوجد اقواس لانهاية مقابلة لجيب التمام المعلوم ولكن نصلح هنا على
 ان نأخذ تمام الجيب الذى يكون 180°
 فن قانون مواريث يحدث ضرورة

$$(ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1)ج\frac{1}{3}ه = ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه (٢)$$

وبالعكس يحدث ايضا $\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه = ج\frac{1}{3}ه$
 $\gamma + 1ج\frac{1}{3}ه$ وحيث نحدث

$$\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه = ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه$$

$$\frac{\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه}{\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه} = \frac{1}{\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه}$$

$$\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه = \frac{\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه}{\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه} + \frac{\gamma}{\gamma^3 ج\frac{1}{3}ه + \gamma - 1ج\frac{1}{3}ه}$$

وليلاحظ ان الطرف الثانى من معادلة (٢) لا يتغير حين يضاف الى γ
 في هذه المعادلة عددا من الدواثر وعلى ذلك ينبغي انه اذا رمز الى 180°
 بحرف γ وبحرف γ الى عددا صحيح يمكن ان يجعل لكمية γ جميع
 المقادير المنحصرة فى قانون

$$س = \gamma^2 \text{ جت } \frac{1}{3} (ه + ٢ك ط)$$

ولكن لا يلزم ان يظن انه يحدث لكمية س. اكثر من ثلاثة مقادير لانه بعد
فرض $ك = ٠$ و ١ و ٢ تحدث الفروض الاخرى عين الحواصل التي
حدثت وعلى كل حال لا ينتج من المقادير الا

$$\begin{aligned} و س &= \gamma^2 \text{ جت } \frac{1}{3} ه \\ و س &= \gamma^2 \text{ جت } \frac{1}{3} (ه + ٢ط) \\ و س &= \gamma^2 \text{ جت } \frac{1}{3} (ه + ٤ط) \end{aligned}$$

(١٣٨)

وانما استعنا بالخطوط المثلثية لتسهيل الصعوبة في الحالة غير القابلة
للاختصار ويمكن الاستعانة بها ايضا في بقية الاحوال ولنستمر على جعل
ل سالبة فنعتبر معادلة

$$س^٣ - ٣س = ٢ك + ٠ \quad (٣)$$

غير اننا نفرض $ك < \gamma^٢$ فتكون التحويلات التي في البند السابق مستحيلة
لان جت ه بقطع النظر عن علاماتها تكون $١ < ١$ وهالكيفية بيان
هذه الحالة

$$س = \gamma^2 \left(\frac{\gamma^٢}{\gamma} + \frac{\gamma^٢}{\gamma^٢} \right)$$

فالا نضع $\gamma^٢$ على هذه الصورة

$$\gamma^٢ = \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} = \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} + \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} - ١ = \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} + \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} - ١$$

ونعين قوس ه من معادلة

$$\gamma^٢ ه = \frac{\gamma^٢}{\gamma}$$

$$\gamma^٢ ه = \frac{\gamma^٢}{\gamma} = \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} + \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} - ١ = \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} + \frac{\gamma^٣}{\gamma^٢} - ١$$

وباخذ جذر التربيع يمكن ان يؤخذ - جت ٢ هـ ١ و + جت ٢ هـ بدون
ترجيح وستأتى على ذلك وبوضع مقدار ٢ جا ٢ هـ و ٢ جا هـ جت هـ عوضا
عن ١ - جت ٢ هـ و جت ٢ هـ عوضا عن ٢ جا هـ ثم اختصار
الحاصل يحدث

$$\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \text{ جا ٢ هـ}}{\sqrt{7} \text{ جا هـ جت هـ}} = \sqrt{7} \text{ ظاه}$$

ثم يوضع ظاو = $\sqrt{7} \text{ ظاه}$ وبحسب قوس و بهذا القانون واذا رمزنا
بحرفي ع و ع' الى جذري تكعيب الواحد التخيليين اللذين احدهما
تربيع للآخر كما هو معلوم تكون المقادير الثلاث لكمية $\frac{7}{\sqrt{7}}$ هكذا

$$\frac{7}{\sqrt{7}} = \text{ظاو} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \text{ع ظاو} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \text{ع' ظاو}$$

وبوضع هذه المقادير في مقدار سه والتنبيه على ان ظا و ظت و = ١

وعلى ان ع = ٣ يحدث

$$\text{سه} = \sqrt{7} (\text{ظاو} + \text{ظت و})$$

$$\text{سه} = \sqrt{7} (\text{ع' ظاو} + \text{ع ظت و})$$

$$\text{سه} = \sqrt{7} (\text{ع' ظاو} + \text{ع ظت و})$$

فلو وضع في الحساب + جت ٢ هـ عوضا عن - جت ٢ هـ لتغير ظاو

الى ظت و وبالعكس لكن ذلك لا ينتج مقادير جديدة لكمية سه

ولست أعوض الآن ع و ع' بمقاديرهما ونفرق في كل مقدار من مقادير

سه الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي فيحدث بواسطة الجبر ان

$$\text{ع} = \frac{1}{4} (3 - \sqrt{7} + 1) \text{ و } \text{ع'} = \frac{1}{4} (3 - \sqrt{7} - 1) \text{ فاذا نبه زيادة على}$$

$$\text{ذلك على ان ظت و} + \text{ظاو} = ٢ \text{ وقت ٢ و } \text{وعلى ان ظت و} - \text{ظاو} =$$

٢ ظت و حدث بعد الاختصار الكلي

$$\text{سه} = \sqrt{2} \text{ ل وقت } 2$$

$$\text{سه} = -\sqrt{2} \text{ ل (وقت } 2 + \sqrt{2} - 3 \text{ ظت } 2)$$

و

$$\text{سه} = -\sqrt{2} \text{ ل (وقت } 2 - \sqrt{2} - 3 \text{ ظت } 2)$$

١٣٩

ولا بد من اعتبار الحالة التي فيها ل موجبة واخذ المعادلة التي بدرجة
ثالثة كما كانت اولا هكذا

$$\text{سه} + 3 \text{ ل}^3 \text{ سه} + 62 = 0 \quad (1)$$

فبسبب ان $د = -\sqrt{2}$ ل يحدث

$$\text{سه} = \frac{ل}{2} - 2 = -\sqrt{2} \text{ ل (وقت } 2 - \sqrt{2} - 3 \text{ ظت } 2)$$

ومن المعلوم ان

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

فيمكن ان يكون الظل وظل التمام ما رين بجميع درجات الكم وحيث كان يمكن
ان الحد $\frac{2}{\sqrt{2}}$ كم ما نستعوضه بوضع احد الخطين فنفرض مثلا ان

$$\text{ظت } 2 \text{ ه} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ ل} \quad \text{فيحدث}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

ولنفرض ايضا ان ظت و = $\sqrt{2}$ ظت ه

فزاويتا و و ه تسهل معرفتهما بواسطة الجدول فيحدث هذه المقادير
الثلاث

ومنه يؤخذ $\frac{س}{ع} = ص$ وبهذا التحويل نصير معادلة (٢) هكذا

$$س^٣ - \frac{س}{ع} س^٢ - \frac{١}{٤} ع^٣ جت ه = ٠ \quad (٤)$$

فاذا ضربت مقادير (٣) في ع توجد جذور المعادلة الاخيرة

$$\text{وتصير جذور هذه المعادلة عين معادلة (١) بوضع}$$

$$\frac{س}{ع} = \frac{٣}{٤} ع^٣ - \frac{١}{٤} ع^٢ جت ه = ٢ ك \quad \text{ومنه يؤخذ}$$

$$ع = \sqrt[٢]{٢ ك} \quad \text{و} \quad جت ه = \frac{ك}{\sqrt[٢]{٢ ك}}$$

ولاجل ان يكون قوس ه حقيقيا يلزم اولا ان يكون جت ه حقيقيا وذلك يقتضى ان تكون ل سالبة في معادلة (١) فحينئذ يوضع ل بدل ل فيجد

$$س^٣ - \frac{س}{٣} س^٢ + ٢ ك = ٠ \quad (٥)$$

ومقدارا ع وجت ه يكونان

$$ع = \sqrt[٢]{٢ ك} \quad \text{و} \quad جت ه = \frac{ك}{\sqrt[٢]{٢ ك}}$$

ولاجل ان تكون ه حقيقية يلزم ان يكون جت ه بقطع النظر عن العلامة > ١ اعنى ان يكون $ك > \frac{١}{٣}$ او يكون $ك - \frac{١}{٣} > ٠$ وحينئذ يمكن حساب ه بواسطة الجداول وبضرب مقادير (٣) في ع اوفى $\sqrt[٢]{٢ ك}$ توجد جذور معادلة (٥) وهى

$$س = \sqrt[٢]{٢ ك} جت \frac{١}{٣} ه \quad \text{و}$$

$$س = \sqrt[٢]{٢ ك} جت \frac{١}{٣} (٢ ط + ه) \quad \text{و}$$

$$س = \sqrt[٢]{٢ ك} جت \frac{١}{٣} (٢ ط - ه)$$

وهذه المقادير يسهل حسابها بالجدول ويمكن تحويل المقادير الى سبقت في بند (٣٧) الى هذه بسهولة

وقد فرضنا تلويحا ان مقدار ع موجب اى $ع = \sqrt[٢]{٢ ك}$ ويمكن فرضه

سالباى ع = -٧٢ ل فيلزم ان يوضع جت ه = $\frac{-ك}{٣٧}$ بدل

جت ه = $\frac{-ك}{٣٧}$ فيلزم في المقادير السابقة ان يوضع -٧٢ بدل

٧٢ كما يوضع ايضا ط = ه بدل ه وحيث كانت المعادلة التي بدرجة ثالثة ليس لها الاثلاثة جذور لا يوجد مقدار جديد لكمية ه وهذا سهل التحقيق

ومنى فرضت ل سالبة و ك > ل آت معادلة (١) الى صورة عدم قبول الاختصار وحيث نحل هذه الحالة بالطريقة التي سبقت

(١٤١)

ولنسترد آتاء على فرض ل سالبة لكن نفرض ان ك - ل < ٠ وان علامة < لا يرزول بها التساوى ففي هذا الغرض لا تكون مقادير ه الموجودة سابقا تخيلية الاسباب ان الشرط الذي يعين ه يقتضى ان يكون جت ه < ١ فيلزم البحث عن كون مقدار ه < ٧٢

ولاجل ذلك نضع ه = ٧٢ ل ق و ١ و ه = ٧٢ ل ق و ٢ وهذا احسن لاجتناب الكسور فيلزم تركيب معادلة بدرجة ثالثة تحتوى على جذر حقيق بهذه الكيفية ويكون جذراها الاخران تخيليين ويسهل حلها بواسطة الجداول وبدون ان يفرض شئ في مضروب ق و ٢ يوضع ه = ٢ ع ق و ٢ ولنفرض ان ع و و كيتان غير منتهيتين فان لاحظنا ان

$$٢ ق و ٢ = \frac{٢}{جا و} = \frac{جا و + جت و}{جا و} = طا و + ظت و \quad \text{يحدث}$$

ه = ع (طا و + ظت و)

فيكون ه^٢ = ع^٢ (طا^٢ و + ظت^٢ و) + ع^٣ (طا و + ظت و) او

$$ه^٢ - ع^٣ ه = ع^٢ (طا^٢ و + ظت^٢ و) = ٠ \quad (٦)$$

بوضع سه بدل ع (ظاو+ظتو) وبالتحويل
 فاذا فرضنا ان جذرى التكعيب التخييليين ع و ع' يسهل التوصل الى
 معادلة (٦) باخذ احده هذه المقادير الثلاثة

$$\text{سه} = \text{ع} \quad (\text{ظاو} + \text{ظتو})$$

$$\text{سه} = \text{ع} \quad (\text{ع} \text{ ظاو} + \text{ع}' \text{ ظتو})$$

$$\text{سه} = \text{ع} \quad (\text{ع}' \text{ ظاو} + \text{ع} \text{ ظتو})$$

وحينئذ تكون هذه المقادير هي جذور معادلة (٦) والا ن يلزم نصيب هذه
 المعادلة عين المعادلة السابقة التى هي

$$\text{سه}^3 - \text{سه}^2 - \text{سه} + ١ = ٠$$

ويؤخذ من هذا

$$\text{ع} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \text{ظاو} + \text{ظتو} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

ولاجل ايجاد و يجب وضع ظاو = $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ظاهر فيحدث
 ظاهر = ظاو ظتو = ظتو $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ومن ذلك ينتج

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ظاو}}{\text{ظتو}} = \frac{\text{جا ه}}{\text{جت ه}} + \frac{\text{ك ه}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{جا ه} + \text{جت ه}}{\text{جا ه جت ه}} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{ك ه}}{\text{جا ه جت ه}}$$

وبهذه الطريقة يفهم ه من الجداول ومن ه يحدث و ثم تحدث
 مقادير سه ويوضع مقدار ع و ع' عوضا عنها وعمل الاختصار
 يوجد كما في بند (١٣٨)

$$\text{سه} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad \text{و}$$

$$\text{سه} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - (\text{قت} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \text{ظت}^3) \quad \text{و}$$

$$\text{سه} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - (\text{قت} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \text{ظت}^3) \quad \text{و}$$

وهذه القوانين لاتليق الا باحوال معادلة

سه^٣ + لسه^٣ + ك^٢ = ٠ التي فيها ل سالبة وك^٢ ل^٣ والا لزم
ان يكون مقدار جا^٢ هـ اما تخليبا واما < ١ فيلزم تغيير الطريقة
اذا كانت ل موجبة فنفرض حينئذ ان سه^٢ = ع جت^٢ و فيحدث
ايضا

$$\text{سه}^{\mathbf{2}} = \text{ع} \left(\frac{\text{جت}^{\mathbf{2}} - \text{جا}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2} \text{جا} \text{جت} \text{و}} \right) = \text{ع} (\text{ظت} - \text{ظا} \text{و})$$

وبالرفع الى التكميل يتوصل كما سبق الى معادلة

$$\text{سه}^{\mathbf{3}} + \text{ع}^{\mathbf{3}} (\text{ظت} - \text{ظا} \text{و}) = ٠ \quad (٧) \quad \text{التي جذورها الثلاثة هي}$$

$$\text{سه} = \text{ع} (\text{ظت} - \text{ظا} \text{و}) \quad \text{و}$$

$$\text{سه} = \text{ع} (\text{ع}^{\mathbf{2}} \text{ظت} - \text{ع}^{\mathbf{2}} \text{ظا} \text{و}) \quad \text{و}$$

$$\text{سه} = \text{ع} (\text{ع}^{\mathbf{2}} \text{ظت} - \text{ع}^{\mathbf{2}} \text{ظا} \text{و})$$

وتصير هذه المعادلة عين مقادير المعادلة المفروضة بفرض ع = ل

$$\text{و} \quad \text{ظت}^{\mathbf{3}} - \text{ظا}^{\mathbf{3}} \text{و} = \frac{\text{ك}^{\mathbf{2}} - \text{ل}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3} \text{ل}^{\mathbf{2}}} \quad \text{ولا جل تعيين كمية و بواسطة الجداول}$$

بوضع ظت = ل^٣ ظت هـ فيكون

$$\text{ظت هـ} - \text{ظا هـ} = (\text{ظت}^{\mathbf{3}} - \text{ظا}^{\mathbf{3}} \text{و}) \quad \text{وحينئذ يحدث}$$

$$\text{ظت هـ} - \text{ظا هـ} = \frac{\text{ك}^{\mathbf{2}} - \text{ل}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3} \text{ل}^{\mathbf{2}}} \quad \text{او} \quad \text{ظت}^{\mathbf{2}} \text{هـ} = \frac{\text{ك}^{\mathbf{2}} - \text{ل}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3} \text{ل}^{\mathbf{2}}}$$

وحيث ان قوس هـ معلوم يمكن ايجاد مقادير سه الثلاثة التي هي

$$\text{سه} = \text{ل}^{\mathbf{2}} \text{ظت} \text{و} \quad \text{و}$$

$$\text{سه} = -\text{ل}^{\mathbf{2}} (\text{ظت}^{\mathbf{2}} \text{و} - \text{ل}^{\mathbf{3}} \text{ظت}^{\mathbf{2}} \text{و}) \quad \text{و}$$

$$\text{سه} = -\text{ل}^{\mathbf{2}} (\text{ظت}^{\mathbf{2}} \text{و} + \text{ل}^{\mathbf{3}} \text{ظت}^{\mathbf{2}} \text{و})$$

ولا يصح ان نعمل التحويلات التي سبقت في صورة ما اذا كان ل سلبيا

لان ظت هـ حينئذ يكون تخيليا

وقد تم طبعه * واينع طبعه * مطبعة صاحب الرحمة عليه * والسعادة الابدية

التي انشأها بيولاقي مصر المحمية * صانها الله من الافات

والبلية * وذلك لعشر خلت من شعبان المكرم

سنة ١٢٥٩ هجرية * على صاحبها افضل

الصلاة وازكى التحية

۴۵ ۴۸۱۸
الحمد لله الذي جعل في كل شيء
دلالة على قدرته وجلته
وآياته وبرهانه

[illegible]

